

RÉSUMÉ

Résumé

Les Processus de Lévy constituent une classe idéale de candidats pour modéliser la dynamique des actifs financiers sur les marchés. En effet, leur grande flexibilité permet de contourner les difficultés que présente le modèle classique de Black et Scholes. Toutefois, leur utilisation dans le cadre des modèles exponentielle-Lévy suppose que soit résolu le problème de calibration par rapport aux données observées sur le marché. Rama Cont et Peter Tankov proposent dans l'article une approche non-paramétrique basée sur la minimisation de l'entropie relative encore appelée information de Kullback-Leiber. Nous prenons prétexte de ce travail pour présenter le cadre général et classique de la théorie des options, relevant clairement au passage les insuffisances du modèle de Black et Scholes et ce faisant les voies de généralisation. Aussi, nous implémentons sur les modèles simples de Cox-Ross-Rubinstein et de Black-Scholes, les procédures de simulation à la Monte-Carlo.

Abstract

The Lévy process offers an ideal class of candidates for modelling the dynamic of financial Asset in markets. In fact, thanks to their great flexibility, insufficiencies found in the Classical Black-Scholes model can be bypassed. However, their use in exponential-Lévy model suggests that the calibration with market data has been solved. In their paper, Rama Cont and Peter Tankov propose a non-parametric approach based on the minimization of the relative entropy called Kullback-Leiber information. We use the opportunity of this work to present the general and henceforth classical framework of the options pricing theory while meantime clearly pointing out the weaknesses of the Black-Scholes-Merton model, thus specifying generalizations ways. Besides, for Cox-Ross-Rubinstein and Black-Scholes models, we implement Monte-Carlo simulation procedures.

DEDICACE

A mon regretté père ,

Papa, toi qui n'as pu voir la promesse des fleurs d'un jardin si merveilleusement entretenu...

A ma très chère,

Claire, découvre-la les bourgeons de notre jardin futur...

REMERCIEMENTS

L'occasion m'est donnée ici de témoigner toute ma gratitude à mon encadreur, le Pr Henri GWET qui malgré ses multiples contraintes a toujours eu le temps pour dire un mot sur l'avancement du travail. Je tiens à remercier également tous nos enseignants du Mastère de Statistique, pour cette merveilleuse expérience que nous avons pu partager durant l'année.

Enfin, je remercie tous mes camarades de classe pour les bons moments passés, et tout particulièrement mon homonyme Hervé KWADJIO. Last but not least, Grand merci à toute ma famille, à mes amis et à tous ceux qui ont toujours crû en moi.

SOMMAIRE

Résumé	i
Abstract	i
DEDICACE.....	ii
REMERCIEMENTS	iii
SOMMAIRE	iv
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
CHAPITRE 0 : LE VOCABULAIRE FINANCIER	2
O-1 Marché financier	2
O-2 Actifs ou instruments financiers	2
O-2-1 Les actions	2
O-2-2 Les obligations.....	2
O-3 Les produits dérivés ou actifs contingents	3
O-3-1 Définition d'une option.....	3
O-3-2 La prime d'une option	3
O-3-3 Valeur intrinsèque (intrinsic value) d'une option.....	3
O-3-4 Valeur-temps (Time value) d'une option	4
O-3-5 Option (dans /en dehors/ à) la monnaie	4
O-4 NOTE : l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA)	4
CHAPITRE I : QUELQUES MODÈLES MATHÉMATIQUES SIMPLES D'ÉVALUATION DES OPTIONS	5
I-1 Le modèle binomial (ou de Cox-Ross-Rubinstein, 1979).....	5
I-1-1 Le cadre probabiliste	5

I-1-2 Définitions et hypothèses	6
I-1-3 Proposition 1	7
I-1-4 Conséquences de la proposition 1	8
I-1-5 La formule d'évaluation d'un Call européen	9
I-1-6 Définitions	10
I-1-7 Proposition 2	10
I-1-8 Proposition 3	11
I-2 Le modèle de Black et Scholes/ Merton (1973)	14
I-2-1 Notions de Calcul stochastique	14
I-2-2 Hypothèses et définitions	16
I-2-3 Lemme.....	18
I-2-4 Proposition 4	19
I-2-5 Valorisation de l'option.....	20
I-3 Les imperfections du Modèle de Black et Scholes/Merton	23
I-3-1 Sur le caractère Brownien de la dynamique du sous-jacent.....	23
I-3-2 Le problème du « Smile » de la volatilité	24
CHAPITRE II : EXTENSIONS DU MODÈLE DE BLACK ET SCHOLES :	26
LES MODÈLES EXPONENTIELLE-LÉVY	26
II.1 Définitions générales et Principales propriétés	26
II.1.1 Généralités sur les processus de Lévy	26
II-1-2 Les modèles exponentielle-Lévy	27
II-2 Le problème du pricing dans un modèle exponentielle-Lévy	30
II-2-1 La méthode de Fourier	30
II-2-2 La méthode de Monte-Carlo	32
II-3 Le problème de calibration dans les modèles exponentielle-Lévy	34

II-3-1 Position du problème	34
II-3-2 Algorithme de détermination de la volatilité et de la mesure de Lévy	34
II-3-3 Reformulation du problème (II.14).....	36
CHAPITRE III : INTÉRÊT SCIENTIFIQUE DE L'APPROCHE DE	38
RAMA CONT ET PETER TANKOV	38
III-1 Introduction.....	38
III-2 Revue de la littérature	38
III-3 Originalité et Contributions des auteurs	39
III-3-1 Originalité de l'article.....	39
III-3-2 Contributions des auteurs	40
CHAPITRE IV : SIMULATIONS NUMERIQUES.....	42
IV-1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein	42
IV-1-1 Calcul explicite par la formule analytique	42
IV-1-2 Simulation Monte-Carlo du modèle binomial.....	43
IV-1-3 Comparaison des résultats	43
IV- 2 Le modèle de Black-Scholes-Merton	44
IV-1-1 Calcul explicite par la formule analytique	44
IV-1-2 Simulation Monte-Carlo du modèle de Black-Scholes-Merton	45
IV-2-3 Comparaison des résultats	45
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	47
BIBLIOGRAPHIE	48

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le marché des options, instruments de spéculation mais également assurances contre le risque financier causé par les fluctuations des actions, s'est développé avec l'élaboration des modèles permettant de les valoriser. Jusqu'à la publication de Black et Scholes[1], la gestion de portefeuille faisait un recours minimaliste aux méthodes mathématiques, c'est plus une approche intuitive et essentiellement basée sur le comportement vis-à-vis du risque du détenteur (Modèle de Markowitz) qui est alors mise en avant.

Reprenant les idées émises par Bachelier dans sa thèse en 1900, le modèle de Black et Scholes introduit une véritable révolution dans le monde de la finance : il donne non seulement le prix d'un « Call » (option d'achat) mais définit également la couverture du vendeur par l'achat d'une certaine quantité de l'actif sous-jacent. Ainsi, la méthode de "pricing" proposée de façon indépendante par Black et Scholes (1973) d'une part et Merton (1973) d'autre part donne une solution aux deux *problèmes majeurs* sur lesquels se heurtaient leurs prédécesseurs :

- d'une part, au lieu d'anticiper l'évolution future de l'action on en détermine le comportement aléatoire en mesurant la volatilité ;
- d'autre part, l'actualisation ramenant au présent la valeur future de l'action doit se faire au taux sans risque : c'est le principe de la valorisation risque-neutre.

La résolution de ces deux problèmes a donné naissance à la théorie mathématique des options. Celle-ci vise avant tout l'évaluation et la couverture des produits dérivés connaissant l'évolution aléatoire des variables de marché (sous-jacents). Mais, il faut noter que l'implémentation de ces modèles implique d'abord d'estimer les paramètres inhérents à partir des données de marché (prix d'options). Il s'agit là du problème inverse de celui de l'évaluation des options. Cette étape, qui correspond à la **calibration d'un modèle** aux données de marché, est préliminaire à toute utilisation/application d'un modèle pour les options. En termes mathématiques, il s'agit d'un problème inverse mal posé qui peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité et dans le meilleur des cas, la correspondance (théorique) entre les données et la solution peut être instable (discontinue).

C'est sur ce dernier aspect que porte le sujet de notre mémoire. Nous essayons à travers l'analyse de l'article de Rama Cont et Peter Tankov [2] d'inscrire le problème dans le cadre général de la théorie mathématique des options et surtout, de présenter l'originalité de la contribution des deux auteurs.

Le présent travail est organisé en quatre chapitres ou sections :

Dans le premier, nous introduisons le lecteur à la théorie mathématique des options au travers des modèles classiques de Cox-Ross-Rubinstein et de Black et Scholes et, relevons au passage les insuffisances du modèle de Black et Scholes. Pour contourner ces lacunes, des extensions et plus généralement de nouveaux modèles ont été proposés. Le second chapitre de notre mémoire tout en rendant compte d'une de ces généralisations, introduit le cadre mathématique dans lequel s'ancre le problème de la calibration analysé par R.Cont et P. Tankov. Le troisième chapitre, cœur même de notre exposé, est dédié à la présentation de la contribution des deux auteurs. Nous terminons en présentant des simulations numériques pour les principales formules analytiques obtenues au chapitre II.

CHAPITRE 0 : LE VOCABULAIRE FINANCIER

Nous présentons dans cette section un certain nombre de notions qui faciliteront la compréhension de l'exposé. Ces concepts sont essentiellement issus du vocabulaire de l'ingénierie financière qui s'est développée très rapidement avec l'apport des modèles mathématiques.

O-1 Marché financier :

C'est une place, plus ou moins physique, organisé de façon à mettre en relation directe les demandeurs et les pourvoyeurs de fonds présents dans une économie donnée. Un marché financier réunit trois types d'opérateurs : le **spéculateur** qui prend un risque plus ou moins important ; le « **hedger**¹ » qui refuse de prendre des risques et se couvre au contraire et enfin l'**arbitragiste**, qui en exploitant les déséquilibres de marché contribue à les faire disparaître et assure ainsi leur liquidité et leur efficience.

O-2 Actifs ou instruments financiers

Du point de vue de l'entreprise, ce sont des contrats émis par elle pour se financer. Ils se répartissent fondamentalement entre titres représentatifs des dettes (*les obligations*) et titres représentatifs des capitaux propres (*les actions*).

Par contre du point de vue des ménages, un actif financier est un moyen d'effectuer des transferts intertemporels de richesse. Lorsque ces transferts de richesse sont parfaitement connus, on parlera d'actifs à revenu fixe (*fixed-income securities*) et concrètement, cela désignera typiquement les *obligations*. A l'inverse, les *actions* sont des exemples d'actifs financiers permettant des transferts de richesse non parfaitement connus aujourd'hui. Nous précisons :

O-2-1 Les actions

Une **action** (equity, stock, share) est un titre de propriété d'une entreprise donnée. Elle génère donc pour ses détenteurs (les actionnaires ou les shareholders) un certain nombre de droits, notamment le droit de recevoir une partie des bénéfices futurs (*dividendes*) et un droit de vote sur les décisions stratégiques de l'entreprise.

O-2-2 Les obligations

Les **titres obligataires** sont des titres de dette et non de propriété comme les actions. Ces titres s'apparentent complètement à une opération de prêt/emprunt : une entreprise qui émet des obligations emprunte des fonds aux acheteur de titres. La seule différence avec les opérations bancaires d'emprunt et de prêt réside dans le caractère négociable de ces titres. L'acheteur initial du titre² a la liberté de revendre son titre à un autre intervenant, ce dernier devenant le créancier de l'émetteur du titre.

¹ Littéralement, couvreur !

² On parle de marché primaire pour désigner la mise en vente initiale des titres, puis de marché secondaire par la suite.

O-3 Les produits dérivés ou actifs contingents

Après avoir introduit précédemment les actifs de base, nous abordons ici les actifs contingents (*contingent claim*), c'est à dire les actifs dont les flux de richesse qu'ils génèrent sont des fonctions- pas nécessairement continues- des prix des actifs de base. L'essor prodigieux des marchés de produits dérivés (actifs contingents) est principalement dû à un impératif de gestion des risques (risk management). Ceci se justifie économiquement par l'accroissement du bien-être d'un individu en environnement incertain, lorsqu'il lui est donné la possibilité de s'assurer. Le produit dérivé le plus couramment utilisé dans l'ingénierie financière est l'option. Il en existe une multitude suivant le sous-jacent sur lequel il est développé et surtout la fonction de gain ou payoff qu'il rapporte.

O-3-1 Définition d'une option

Une option est un titre donnant à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une *option d'achat/Call ou de vente/Put*) une certaine quantité d'actif financier, appelé **actif sous-jacent**- cela pouvant être un actif financier (actions, obligations, bons du Trésor, contrats à terme, devises,...) ou un actif physique (matières premières agricoles ou minérales...)- à une date convenue, appelée *date d'exercice/maturity* ou encore échéance, et à un prix fixé à l'avance, appelé *prix d'exercice/strike price*.

Le détenteur de l'option peut exercer son option (c'est à dire acheter l'actif sous-jacent s'il détient une option d'achat ou le vendre s'il détient une option de vente) soit à la date d'exercice, soit pendant une période, appelée période d'exercice. Suivant les deux alternatives évoquées, on parlera pour la première d'une option d'achat ou de vente **européenne** et dans le second, d'option d'achat ou de vente **américaine**. Il faut noter que cette distinction n'est basée sur aucun critère géographique, en effet la grande majorité des options cotées en bourse sont des options américaines où que l'on se trouve des deux côtés de l'Atlantique, alors que les options de gré à gré sont majoritairement européennes.

L'option est une sorte de d'assurance contre le risque de marché du sous-jacent. Le vendeur de l'option étant l'assureur et l'acheteur l'assuré.

O-3-2 La prime d'une option

C'est la valeur à laquelle est achetée ou vendue une option. Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé, la prime est donnée par le marché selon la loi de l'offre et de la demande. En l'absence de cotation, le problème du calcul de la prime se pose. Et, même pour une option cotée, il peut être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modèle permettant de détecter d'éventuelles anomalies de marché.

O-3-3 Valeur intrinsèque (*intrinsic value*) d'une option

Il correspond au gain/pay-off qu'on recevrait si l'option était ou pouvait (car le détenteur de l'option n'en a pas nécessairement le droit) être exercée aujourd'hui. Concrètement, pour une option d'achat c'est la différence entre le cours de l'actif sous-jacent et son prix d'exercice ; tandis que pour une option de vente, c'est l'opposé.

O-3-4 Valeur-temps (Time value) d'une option

C'est la différence entre le prix de marché de l'option aujourd'hui et sa valeur intrinsèque. Cela correspond seulement au supplément de valeur dû au fait que l'option sera exercée dans le futur. En d'autres termes, c'est l'anticipation d'une hausse de la valeur intrinsèque de l'option.

O-3-5 Option (dans /en dehors/ à) la monnaie

On dit que le Call (respectivement le Put) est dans la monnaie/in the money quand le cours de l'actif sous-jacent est supérieur (respectivement inférieur) au prix d'exercice. Dans le contraire, on dit que le Call (respectivement le Put) est en dehors de la monnaie/out of money. Enfin, si le cours de l'actif sous-jacent est égal au prix d'exercice, l'option est dite à la monnaie/at the money.

Pour terminer cette section, nous rappelons un fait fondamental en finance de marché.

O-4 NOTE : l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA)

Il y a possibilité d'*arbitrage* lorsqu'un investisseur peut réaliser des gains sur le marché sans prendre aucun risque. Un portefeuille qui offre une possibilité d'arbitrage est un portefeuille de valeur nulle à un instant initial (arbitrairement choisi) et qui aura une valeur positive à un instant t ultérieur avec une probabilité égale à l'unité.

Enoncé de la loi fondamentale de la finance de marché :

Dans un marché très liquide, où il n'y a pas de coûts de transaction, pas d'asymétries de l'information, ni limitations sur la gestion (achat-vente) des actifs supports, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul.

En effet, dans les marchés financiers il existe des arbitragistes qui sont des intervenants dont l'activité est de détecter les produits financiers dont le prix est décalé par rapport à ce qu'il devrait être compte tenu des autres prix du marché et d'en tirer parti pour faire des profits sans prendre de risque. Ils contraignent ainsi les prix à vérifier certaines relations conduisant à la règle dite de l'unicité des prix des produits dérivés au sens où :

Deux stratégies qui donnent le même flux à l'horizon de gestion dans tous les états du monde ont la même valeur à toute date intermédiaire.

CHAPITRE I : QUELQUES MODÈLES MATHÉMATIQUES SIMPLES D'ÉVALUATION DES OPTIONS

Etant donné les prix ou cours des actifs de base (les actions par exemple), quelles valeurs doivent prendre les prix des produits dérivés construits à partir de ces sous-jacents, dans le cas des options en particulier ? C'est à cette principale problématique qu'est dédiée cette section. Nous y présentons des exemples de modélisations mathématiques qui donnent une solution au problème de la valorisation des options.

Comme nous le verrons, la pierre d'angle de tous ces modèles est l'**hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)** que nous avons évoquée dans le chapitre précédent. Nous commençons par un modèle d'évaluation simple : le modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein.

I-1 Le modèle binomial (ou de Cox-Ross-Rubinstein, 1979)

I-1-1 Le cadre probabiliste

Nous considérons un marché financier qui se tient uniquement à deux dates : la date 0 et la date 1 ; en plus on suppose que le cadre probabiliste n'est constitué que deux états possibles du monde à la date 1 : $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$.

On suppose présent sur le marché uniquement deux actifs financiers : une action et un placement sans risque (comme un bon du Trésor ou plus généralement une obligation). On notera respectivement par $S = \{S_t, t = 0, 1\}$ et $B = \{B_t, t = 0, 1\}$ les processus d'évolution des cours de l'action (stock) et de l'obligation (bond).

Par définition, le processus de B est déterministe :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_1 = 1 + R \end{cases}, \text{ où } R (\in]0, 1[) \text{ correspond au taux d'intérêt}$$

(court terme) sans risque ;

Le processus de S est stochastique :

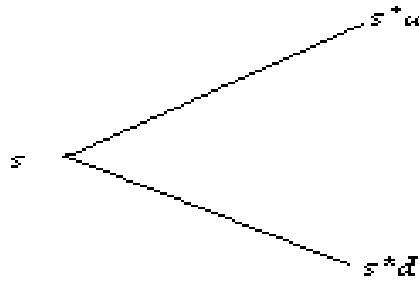
$$\begin{cases} S_0 = s, \text{ avec } s \in \mathbb{R}_+^* \\ S_1 = \begin{cases} s^*u \\ s^*d \end{cases}, \text{ } u \text{ et } d \text{ sont des réels tels que } 0 < d < u \end{cases}$$

et $P(S_1 = s^*u) = p_u$ et $P(S_1 = s^*d) = p_d$ avec $p_u + p_d = 1$.

La dynamique des deux processus se représente facilement ainsi qu'il suit :

Dynamique de B : $1 \rightarrow 1 + R$

Dynamique de S :



Ce dernier diagramme représente un **arbre binomial**.

On peut réécrire la définition de S sous la forme suivante : $S_0 = s$ et $S_1 = s \cdot Z$ où Z est une variable aléatoire discrète telle que $P(Z = u) = p_u$ et $P(Z = d) = p_d$.

I-1-2 Définitions et hypothèses

A/ Définitions

Portefeuille : il s'agit d'un vecteur bidimensionnel³ $h = (x, y)$ où x (resp. y) désigne le nombre d'Obligations (resp. Actions) détenues par un individu.

Il faut noter que x et y peuvent prendre des valeurs positives ou négatives. En effet, si au temps 0 l'individu détient un certain nombre de parts de l'obligation (*position longue*), alors x est positif et est égal à ce nombre de parts. Si par contre, il emprunte un certain nombre de parts d'obligations auprès d'une banque, x sera ce nombre affecté du signe négatif (*position courte*). Il en va de même pour y.

Valeur d'un portefeuille : On définit par $V^h = \{V_t^h, t = 0, 1\}$, le processus de la valeur de marché du portefeuille h : $V_t^h = xB_t + yS_t$.

On obtient immédiatement que $V_0^h = x + yS$; $V_1^h = x(1 + R) + yS_1$

Notions d'arbitrage

Un portefeuille qui offre *une possibilité d'arbitrage* est un portefeuille h avec les propriétés suivantes : $V_0 = 0$; $V_1 > 0$, avec une probabilité égale à 1.

Nous explicitons dans l'encadré suivant la notion d'opportunité d'arbitrage.

³ On rappelle que l'on ne dispose que de deux titres (action et obligation) sur le marché financier

Un exemple d'opportunité d'arbitrage :

On suppose le modèle binomial sur une période suivant :

$$s = 100 ; Z = \begin{cases} 1.5; & p_u = 0.4 \\ 1.2; & p_d = 0.6 \end{cases} ; R = 0.05$$

Que fait un agent avisé ? Au temps 0, il emprunte à la banque 100 (i.e $x = -100$) et achète 1 part de l'action au prix 100 (i.e $y = 1$). Ainsi, $V_0^h = x + ys = -100 + (100)(1) = 0$.

Au temps 1, la valeur de son portefeuille est :

$$V_1^h = \begin{cases} x(1.05) + ys(1.5) = -105 + 150(1) = 45, & p_u = 0.4 \\ x(1.05) + ys(1.2) = -105 + 120(1) = 15, & p_d = 0.6 \end{cases}$$

Dans les deux états du monde, le détenteur du portefeuille s'en tire avec un gain positif. Ainsi, sans avoir investi un sous de sa poche et sans avoir pris aucun risque, l'agent liquide le titre, rembourse son emprunt et il lui reste au moins 15 unités monétaires.

B/ Hypothèses fondamentales du modèle

On suppose les conditions suivantes concernant le marché financier :

- Tout élément $h \in \mathbb{R}^2$ est un portefeuille permis. Cela signifie que les positions courtes sont permises et qu'il est possible de détenir des fractions de titres financiers (des fractions d'une action par exemple) ;
- Le prix d'achat et le prix de vente sont identiques pour chaque titre ;
- Aucun frais de transaction n'est requis ;
- Le marché est complètement liquide. On peut acheter ou vendre en quantités illimitées sur le marché. On peut aussi emprunter autant qu'il est possible.

Conservant les notations admises plus haut, nous présentons dans la proposition suivante, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le modèle binomial n'offre pas de possibilités d'arbitrage.

I-1-3 Proposition 1

Le modèle binomial sur une période n'offre pas de possibilité d'arbitrage si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

$$d \leq 1 + R \leq u \quad (\mathbf{I.1})$$

Preuve :

On démontre que l'absence d'arbitrage implique **(I.1)**.

Par contraposition,

Supposons que $(1+R) > u$.

Ceci implique aussi que $(1+R) > d$; il s'ensuit qu'il est profitable d'investir dans l'obligation plutôt que dans l'action. Au temps 0, on constitue le portefeuille $h = (s, -1)$ en vendant l'action au prix s ($y = -1$) et on investit s dans l'obligation ($x = s$). Cela implique que $V_0^h = 0$.

Au temps 1, on a $V_1^h = s(1+R) - sZ = s[(1+R) - Z] > 0$ par hypothèse. Comme $V_1^h > 0$, le marché offrait une possibilité d'arbitrage d'où contradiction.

Si on supposait plutôt que $(1+R) < d$, alors il est clair que $(1+R) < u$. Il s'ensuit qu'il est profitable d'investir dans l'action plutôt que dans l'obligation.

Au temps 0, on constitue un portefeuille $h = (-s, 1)$ en empruntant $-s$ ($x = -s$) et on investit 1 dans l'action ($y = 1$). Ceci implique $V_0^h = 0$.

Au temps 1, on a $V_1^h = -s(1+R) + sZ = s[Z - (1+R)] > 0$ par hypothèse. Comme $V_1^h > 0$, le marché offrait une possibilité d'arbitrage d'où contradiction.

On démontre que **(I.1)** implique l'absence d'arbitrage.

Supposons **(I.1)** vraie, considérons alors un portefeuille quelconque tel que. $V_0^h = x + ys = 0$, ceci entraîne que $x = -ys$. Au temps 1, comme $V_1^h = x(1+R) + yZ = -ys(1+R) + yZ$, on a :

$$V_1^h = ys[u - (1+R)], \text{ si } Z = u \quad \text{ou} \quad ys[d - (1+R)], \text{ si } Z = d$$

Si le nombre d'actions $y > 0$, alors il y a arbitrage si et seulement si $u > 1+R$ et $d > 1+R$, ce qui contredit (2.1)

Si par contre le nombre d'actions $y < 0$, alors il y a arbitrage si et seulement si $1+R > u$ et $1+R > d$, ce qui contredit encore **(I.1)**.

I-1-4 Conséquences de la proposition 1

La condition **(I.1)** implique $(1+R)$ appartient au segment reliant d à u . En d'autres termes, il existe deux réels positifs q_d et q_u tels que $q_d + q_u = 1$ et $1+R = q_d d + q_u u$.

Les coefficients q_d et q_u peuvent être interprétés comme des probabilités sous une nouvelle mesure de probabilité Q dont la propriété est : $Q(Z = u) = q_u$ et $Q(Z = d) = q_d$.

Définissons E^Q comme l'espérance sous la mesure de probabilité Q . Sous cette mesure, on constate que :

$$E^Q \left[\frac{S_1}{1+R} \right] = \frac{1}{1+R} E^Q [S_1]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+R}(q_dsd + q_usu) \\
&= \frac{1}{1+R}(1+R)s \\
&= s = S_0
\end{aligned}$$

On en déduit la relation :

$$E^Q \left[\frac{S_1}{1+R} \right] = S_0$$

Cette dernière égalité rappelle la caractéristique d'une martingale. Reprenant les notations du paragraphe I-1-1, nous pouvons écrire :

Définition : une mesure de probabilité Q sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ est appelée une **mesure martingale ou mesure de probabilité risque- neutre** on a :

$$E^Q \left[\frac{S_1}{1+R} \right] = S_0$$

On rappelle que $\{S = S(\omega^i, t); (i, t) \in \{1, 2\} \times \{0, 1\}\}$ est un processus stochastique sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

On déduit de cette définition, une autre formulation de la proposition 1⁴ :

Le modèle binomial sur une période n'offre pas de possibilités d'arbitrage Si et Seulement S'il existe une mesure martingale (ou neutre au risque) Q. De façon concrète, cette mesure de probabilité est définie par $q_u = \frac{(1+R)-d}{u-d}$ et $q_d = \frac{u-(1+R)}{u-d}$.

I-1-5 La formule d'évaluation d'un Call européen

Supposons que le prix d'exercice « Strike » K est tel que $s*d < K < s*u$. Alors, selon le modèle binomial,

- Si $S_1 > K$, le détenteur exercera son option d'achat (i.e acheter le titre au prix K), revendra sur le marché l'action au prix S_1 et encaissera un profit de $S_1 - K > 0$;
- $S_1 < K$, le détenteur n'exercera pas son option ; elle est d'une valeur nulle.

⁴ Cette formulation est une version simplifiée du **Fondamental Theorem of Asset Pricing** (Théorème fondamental d'évaluation des actifs financiers) obtenu par M. Harrison et S. Pliska (1981) dans le cadre général où l'espace Ω des états de la nature est fini.

Ainsi, si X désigne la valeur intrinsèque de l'option, il est évident de voir que X est une variable aléatoire car fonction mesurable de l'aléa Z . De façon précise $X = \max(S_1 - K, 0)$ ou encore $X = \phi(Z) = su - K$ si $Z = u$ ou $X = \phi(Z) = 0$ si $Z = d$.

Le problème est de trouver le prix juste (« fair ») de l'option.

Notons $\Pi(t; X)$ le prix de l'option au temps t . Pour éviter des possibilités d'arbitrage, nous devons avoir $\Pi(1; X) = X$. Question : Que vaut $\Pi(0; X)$? (i.e le prix de l'option aujourd'hui).

Pour répondre à cette question, nous avons besoin d'introduire de nouveaux concepts.

I-1-6 Définitions

- 1) Une option (ou généralement tout produit dérivé) de valeur intrinsèque X est dite **atteignable ou simulable** s'il existe un portefeuille h tel que $V_1^h = X$, avec une probabilité 1.
- 2) Un tel portefeuille est appelé portefeuille de **couverture** ou portefeuille permettant de reproduire l'option.
- 3) Si dans un marché financier, toutes les options peuvent être reproduites, alors on dit que le marché est **complet**.

Remarques

1) Du point de vue de l'émetteur, un portefeuille de couverture est un portefeuille qu'il peut constituer dans le but de se protéger ou de se couvrir contre le risque financier auquel il s'expose en émettant un produit dérivé.

2) D'un point de vue financier, il n'existe pas de différence entre détenir le produit dérivé ou détenir le portefeuille de couverture.

3) « **Principe** » de prime : Si une option (ou généralement un produit dérivé) de valeur intrinsèque X est atteignable avec un portefeuille h , alors le seul prix raisonnable auquel on peut l'évaluer est donné par $\Pi(t; X) = V_1^h$; $t = 0, 1$.

I-1-7 Proposition 2

Supposons qu'un produit dérivé (option) de valeur intrinsèque X peut être reproduit avec un portefeuille h . Alors tout prix au temps 0 différent de V_0^h conduit à une possibilité d'arbitrage.

Preuve : Supposons qu'un individu est prêt à acheter une option de valeur intrinsèque X pour un prix $\Pi(0; X) = V_0^h + \Delta$ où $\Delta > 0$ ⁵. Alors au temps 0, le vendeur de l'option compose un portefeuille h dont la valeur V_0^h lui permettra de reproduire l'option au temps 1 et aussi achète

⁵ Il est évident que Δ ne peut être négatif car si tel était le cas, le vendeur étant rationnel ne céderait certainement pas l'option.

Δ obligations. Au temps 1, le vendeur possèdera $\Pi(1; X) = V_1^h + \Delta(1+R) = X + \Delta(1+R)$ et fera ainsi un profit d'une valeur $\Delta(1+R)$ sans avoir pris de risque.

La proposition suivante nous permet de conclure sur le problème initial.

I-1-8 Proposition 3

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le modèle (marché financier) binomial à une période est complet.

Preuve :

On considère une option de valeur intrinsèque X . on veut montrer qu'il existe un portefeuille $h=(x, y)$ tel que

$$V_1^h = \begin{cases} \phi(u), & \text{si } Z = u \\ \phi(d), & \text{si } Z = d \end{cases}$$

On cherche la solution (x, y) du système linéaire à 2 équations et 2 inconnues suivant :

$$\begin{cases} (1+R)x + suy = \phi(u) \\ (1+R)x + sdy = \phi(d) \end{cases} \quad \text{où } d < u$$

La solution unique est :

$$x = \frac{1}{1+R} * \frac{u\phi(d) - d\phi(u)}{u-d}$$

$$y = \frac{1}{s} * \frac{\phi(d) - \phi(u)}{u-d}$$

Ce qui achève la preuve.

Revenons au problème initial de l'évaluation d'un Call européen dans le modèle binomial, nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \Pi(0; X) &= x + ys \\ &= \frac{1}{1+R} * \frac{u\phi(d) - d\phi(u)}{u-d} + \frac{1}{s} * \frac{\phi(u) - \phi(d)}{u-d} s \\ &= \frac{1}{1+R} \left[\frac{(1+R) - d}{u-d} \phi(u) + \frac{u - (1+R)}{u-d} \phi(d) \right] \end{aligned}$$

et si l'on se souvient que $q_u = \frac{(1+R) - d}{u-d}$ et $q_d = \frac{u - (1+R)}{u-d}$, on peut écrire

$$\Pi(0; X) = \frac{1}{1+R} E^Q [X] = \frac{1}{1+R} E^Q [\phi(Z)] \quad (\text{I.2})$$

qui donne le prix « sans arbitrage » (et unique) de toute option (ou produit dérivé) de valeur intrinsèque $X = \phi(Z)$.

Cas général : modèle à T périodes ($T \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$)

Le modèle binomial à une période se généralise de façon évidente à un nombre de périodes T quelconque. Ici le nombre d'états de la nature à considérer est 2^T , correspondant au nombre de trajectoires possibles entre la date 0 et la date T.

Si nous notons C_t le prix du produit dérivé (call par exemple) à la date t, alors par un raisonnement à rebours à partir de la période terminale, nous obtenons encore la propriété des martingales apparue dans la formule (I.2):

$$C_t = \frac{1}{1+R} E_t^Q [C_{t+1}], \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

où E_t^Q désigne l'espérance conditionnelle (sachant S_t et son passé) calculée avec la probabilité risque-neutre Q.

La déduction de la valeur du call européen se fait en remarquant qu'à la date d'exercice T : $C_T = \max(S_T - K, 0)$, donc le prix actualisé s'écrit :

$$C_t = \frac{1}{(1+R)^{T-t}} E_t^Q [\max(S_T - K, 0)]$$

Comme la loi de S_T conditionnellement à S_t ou à la tribu \mathcal{F}_t est une loi binomiale $B(T-t, q_u)$ ou $B(T-t, q_d)$, nous avons concrètement :

$$S_T = S_t (1+R)^{T-t} \prod_{k=0}^{T-t-1} Z_{T-k} \quad \text{avec } \{Z_k, k=0, \dots, T\} \text{ variables indépendantes identiques à } Z$$

et par suite, il vient
$$C_t = \frac{S_t}{(1+R)^{T-t}} \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} q_u^j (1-q_u)^{T-t-j} \left[\max \left(u^j d^{T-t-j} - \frac{K}{S_t}; 0 \right) \right] \quad (\text{I.3})$$

En posant $k^* = \inf \left\{ j \in \mathbb{N} / u^j d^{T-t-j} - \frac{K}{S_t} > 0 \right\}$, la formule (I.3) se réécrit :

$$C_t = \frac{S_t}{(1+R)^{T-t}} \sum_{j=k^*}^{T-t} \binom{T-t}{j} q_u^j (1-q_u)^{T-t-j} \left[u^j d^{T-t-j} - \frac{K}{S_t} \right] \quad (\text{I.4})$$

Nous en déduisons la **formule d'évaluation de Coss-Ross-Rubinstein** :

$$C_t = S_t \mathcal{B}\left(T-t, k^*, \frac{q_u u}{1+R}\right) - \frac{K}{(1+R)^{T-t}} \mathcal{B}(T-t, k^*, q_u) \quad (\text{I.5})$$

$$\text{où } \mathcal{B}(T-t, k^*, q_u) = \sum_{j=k^*}^{T-t} \binom{T-t}{j} q_u^j (1-q_u)^{T-t-j}.$$

Cette formule permet d'exprimer le prix d'un Call européen à un instant t dans un modèle binomial en fonction du temps t et du prix du sous-jacent S_t .

Remarque

L'évaluation en temps discret nous a permis de mettre en relief de façon assez simple les principales notions qui interviennent de façon fondamentale dans la théorie des options : il en est ainsi de la notion de *mesure martingale* ou de *probabilité risque-neutre* qui se déduit de l'hypothèse d'absence d'arbitrage. Toutefois, la réalité des marchés penche pour un temps continu. En effet, à cause du développement des technologies de l'information et de l'internalisation des échanges, la plupart des marchés financiers importants fonctionnent presque en continu. Ceci justifie l'introduction des modèles d'évaluation continus.

I-2 Le modèle de Black et Scholes/ Merton (1973)

Pour définir le cadre probabiliste du modèle, nous avons besoin des outils du Calcul Stochastique.

I-2-1 Notions de Calcul stochastique

A/ Définitions générales

Soit (Ω, F, P) est un espace probabilisé complet : Ω désigne habituellement l'ensemble des états possibles du monde ; F est une σ -algèbre de parties de Ω et P une mesure de probabilité définie sur Ω .

a) On appelle *processus stochastique* à valeurs dans un espace E muni d'une tribu \mathcal{E} , une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé (Ω, F, P) à valeurs dans (E, \mathcal{E}) . Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelée la trajectoire associée à ω . Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est dit à *trajectoires continues* (resp. à *trajectoires p.s continues*) si pour tout $\omega \in \Omega$ (resp. pour tout ω hors d'un ensemble négligeable), $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue.

b) Une *filtration* $(F_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante (au sens de l'inclusion) de sous-tribus de F . Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est *adapté* à la filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ si pour tout t , X_t est F_t -mesurable. On appelle *filtration naturelle* d'un processus X la plus petite filtration par rapport à laquelle X est adapté, en d'autres termes pour tout t , il s'agit de la tribu engendrée par la famille $\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$, tribu complétée par les P-ensembles négligeables.

c) Un processus X est dit *prévisible* s'il est adapté à la famille $\mathcal{F} = \{F_t, t \in \mathbb{R}\}$ et si ses trajectoires sont continues à gauche.

d) On appelle (\mathcal{F}, P) -*martingale*, tout processus X adapté à \mathcal{F} intégrable tel que :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, s \leq t \Rightarrow E^P \left[\frac{X_t}{F_s} \right] = X_s$$

e) On appelle *mouvement Brownien* (ou *processus de Wiener*) *standard*, un processus B vérifiant :

- i) $B_0 = 0$ P-p.s ;
- ii) B est à accroissements indépendants: i.e pour tout n-uple $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les variables $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ sont indépendantes ;
- iii) B est à accroissements stationnaires : i.e pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, la loi de $B_{t+h} - B_t$ ne dépend que de h ;

$$\text{iv) } \forall (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, s < t, \quad B_t - B_s \sim N\left(0, \sqrt{t-s}\right);$$

v) B est à trajectoires continues.

f) Un processus $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ est un *processus d'Itô* à valeurs réelles s'il existe $\mu(t)$ processus adapté et $\sigma(t)$ processus prévisible vérifiant :

$$\int_0^T |\mu(s)| ds < \infty \quad P \text{ p.s} \quad \int_0^T \sigma^2(s) ds < \infty \quad P \text{ p.s}$$

tels que $X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma^2(s) ds, t \in [0, T]$. On écrit cette dernière équation sous la

$$\text{forme concise : } \begin{cases} dX_t = \mu(t) + \sigma(t)dB(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Nous rappelons ici deux résultats fondamentaux en Calcul Stochastique. On peut consulter *Brownian motion and Stochastic Calculus* (Karatzas, I. et Shreve, S.E, Springer verlag, 1991) pour leurs preuves.

B/ Quelques résultats utiles

Lemme d'ITÔ

Soit $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et X un processus d'Itô tel que : $dX_t = \mu(t) + \sigma(t)dB(t)$.

Soit $Y_t = f(t, X_t)$. Alors Y est un processus d'Itô vérifiant :

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\mu(t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\sigma(t)dB(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\sigma^2(t)dt$$

Théorème de GIRSANOV

Soit L_t le processus défini par $L_t = \exp\left\{\int_0^t h(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)ds\right\}$, où $\{h(s)\}_{s \in [0, T]}$ est un processus adapté borné. Le processus L_t est l'unique solution de $dL_t = L_t h_t dB_t, L_0 = 1$ et il vérifie $E(L_t) = 1 \forall t \in [0, T]$. Le processus L_t est une martingale.

Soit Q la probabilité définie sur (Ω, \mathcal{F}_T) par $Q(A) = E^P[1_A L_T]$. Sous Q , le processus $B_t^* = B_t - \int_0^t h(s)ds$ est un mouvement Brownien.

I-2-2 Hypothèses et définitions

A/ Hypothèses

Nous considérons l'intervalle $[0, T]$ avec $T < \infty$ comme horizon temporel de notre marché financier. Toutes les variables aléatoires sont définies sur $\Omega = \{\omega : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \omega \text{ continue}\}$ qui est l'espace des états possibles du monde.

Notons $\mathcal{F}^0 = \sigma\{\omega(t) : 0 \leq t \leq T\}$ et P la mesure de probabilité définie sur (Ω, \mathcal{F}^0) telle que le processus canonique W définie par $W_t(\omega) = \omega(t)$, $\omega \in [0, T]$ soit un mouvement brownien standard de dimension 1 sous P^6 . Par ailleurs, appelons (Ω, \mathcal{F}, P) le complété de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}^0, P)$ et introduisons la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ telle que pour tout t $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$, il s'agit de la plus petite σ -algèbre qui rend mesurable W_s ($s \in [0, T]$), et qui contient tous les P -ensembles négligeables de \mathcal{F} où $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

Comme dans le cas binomial, le marché comporte deux actifs : un actif à risque (action) dont le processus de prix est $S = \{S_t, t \in [0, T]\}$ et un actif sans risque (bon du Trésor ou obligation) de prix $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$. Ces deux processus sont définis par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right); \quad t \in [0, T] \quad (\text{I.6})$$

$$B_t = e^{rt} \quad t \in [0, T] \quad (\text{I.7})$$

où $r > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ et $S_0 > 0$ est une constante positive. Le paramètre σ est appelé *volatilité du modèle*.

On montre en utilisant le fait que W est un brownien standard, que $\{(e^{-\mu t} S_t, \mathcal{F}_t), t \in [0, T]\}$ est une L^2 -martingale sous P . Par ailleurs, il est évident que les processus S et B sont continus et adaptés à \mathcal{F}_t et vérifient (à travers le lemme d'Itô) les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ dB_t = r B_t dt \end{cases}, \quad t \in [0, T] \quad (\text{I.8})$$

En plus des hypothèses sur le cadre probabiliste, nous conservons intégralement les hypothèses économiques (II-1-2/B) du modèle binomial. Maintenant, nous donnons des définitions utiles pour la suite.

⁶ Une telle mesure de probabilité est encore appelée **mesure de Wiener**.

B/ Définitions

Définition 1/ Une stratégie de gestion est un processus stochastique ϕ à valeurs dans \mathbb{R}^2 , $\phi = \{\phi_t = (\alpha_t, \beta_t), t \in [0, T]\}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\phi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ est $(\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}_T)$ -mesurable, où $\phi(t, \omega) = \phi_t(\omega)$;

(ii) ϕ est adapté, i.e $\phi_t \in \mathcal{F}_t$, pour tout $t \in [0, T]$;

(iii) $\int_0^T \alpha_t^2 dt < \infty$ et $\int_0^T |\beta_t| dt < \infty$ P – presque sûrement.

Ces conditions assurent la finitude P-p-s des intégrales $\int_0^t \alpha_s dS_s$ et $\int_0^t \beta_s dB_s$ et aussi le fait que comme fonctions de t, elles définissent des processus stochastiques adaptés.

Définition 2/ La valeur à l'instant t du portefeuille associé à ϕ est donnée par $V_t(\phi) = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$

Définition 3/ Une stratégie de gestion est dite *autofinancante* si nous avons :

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s dS_s + \int_0^t \beta_s dB_s \quad t \in [0, T] \quad \text{P-p-s.} \quad (\text{I.9})$$

ou en d'autres termes,

$$dV_t(\phi) = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t, \quad t \in [0, T] \quad \text{P-p-s.} \quad (\text{I.10})$$

En particulier, cette dernière écriture signifie que les changements intervenus dans la valeur du portefeuille ne sont dus qu'aux variations des actifs contenus dans le portefeuille, aucune source de variation externe (ajout de capital ou prise de bénéfice) n'est permise.

Soit ϕ une stratégie de gestion, les processus de prix actualisé de l'action et de la valeur du portefeuille associé à ϕ sont donnés respectivement par :

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t} = e^{-rt} S_t \quad (\text{I.11})$$

$$V_t^*(\phi) = \frac{V_t(\phi)}{B_t} = e^{-rt} V_t(\phi), \quad t \in [0, T] \quad (\text{I.12})$$

En utilisant (I.8) et (I.11), il vient pour $t \in [0, T]$ que sous P,

$$dS_t^* = -rS_t^* dt + e^{rt} dS_t = (\mu - r)S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t \quad (\text{I.13})$$

Donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une stratégie de gestion soit autofinancante.

I-2-3 Lemme

Une stratégie de gestion ϕ est autofinancante si, et seulement si,

$$V_t^*(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s dS_s^*, \text{ pour tout } t \in [0, T] \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement.} \quad (\mathbf{I.14})$$

Preuve

\Rightarrow (Condition nécessaire)

Supposons que ϕ est une stratégie de gestion autofinancante, alors par définition nous écrivons : $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s dS_s + \int_0^t \beta_s dB_s \quad t \in [0, T]$

$$\text{Aussi, par définition } V_t^*(\phi) - V_0^*(\phi) = \int_0^t dV_s^*$$

$$\text{mais } dV_s^* = d(e^{-rs}V_s) = -re^{-rs}V_s ds + e^{-rs}dV_s$$

$$= -re^{-rs}(\alpha_s S_s + \beta_s B_s) + e^{-rs}(\alpha_s dS_s + \beta_s dB_s) \text{ pour } s \in [0, t] \subseteq [0, T]$$

l'on a remplacé les expressions de dV_s et V_s ; en prenant en compte les formules de **(I.8)**, l'on déduit :

$$dV_s^* = e^{-rs} \alpha_s ((\mu - r)S_s ds + \sigma S_s dW_s)$$

$$= \alpha_s dS_s^* \text{ pour } s \in [0, t] \subseteq [0, T] \text{ d'après } (\mathbf{I.13})$$

Finalement on obtient $V_t^*(\phi) - V_0^*(\phi) = \int_0^t \alpha_s dS_s^*$ et en remarquant que $V_0^*(\phi) = V_0(\phi)$, on aboutit au résultat.

\Leftarrow (Condition suffisante)

Inversement, on suppose **(I.14)** vérifiée. Par dérivation simple, on a $dV_t^* = \alpha_t dS_t^*$, pour tout $t \in [0, T]$.

En utilisant la définition de $S_t^* = e^{-rt} S_t$, nous avons par simple dérivation :

$dS_t^* = d(e^{-rt} S_t) = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t$ d'où $dV_t^* = e^{-rt} (-r\alpha_t S_t dt - r\beta_t B_t dt + \beta_t dB_t + \alpha_t dS_t)$ en utilisant **(I.8)**. Il vient ensuite $dV_t^* = e^{-rt} (-rV_t(\phi) dt + \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t)$ avec la définition de $V_t(\phi)$.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } dV_t &= d(e^{rt}V_t^*) = re^{rt}V_t^* dt + e^{rt}dV_t^* \\
&= rV_t(\phi)dt + (-rV_t(\phi)dt + \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t) \\
&= \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t, \text{ ce qui montre que } \phi \text{ est autofinancante.}
\end{aligned}$$

Définition 4/ Une stratégie de gestion autofinancante ϕ est une opportunité d'arbitrage si :

$$V_0(\phi) = 0, \quad V_T(\phi) \geq 0, \quad \text{et} \quad E[V_T(\phi)] > 0. \quad (\text{I.15})$$

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) sur le marché⁷, nous avons :

I-2-4 Proposition 4

Il existe une mesure de probabilité Q^8 équivalente à P telle que les prix actualisés soient des Q -martingales.

Preuve :

Nous voulons montrer qu'une telle mesure de probabilité Q existe.

$$\text{De (I.6) et (I.11), nous pouvons écrire } S_t^* = S_0 \exp\left(\left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \quad (\text{I.16})$$

$$\text{et en particulier, } P\text{-presque sûrement } dS_s^* = (\mu - r)S_s^* ds + \sigma S_s^* dW_s, \quad s \in [0, T] \quad (\text{I.17})$$

En intégrant sur $[0, t]$, ($t \in [0, T]$) le deuxième terme du membre de droite dans (I.17), nous définissons une P -martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Ainsi, nous chercherons une mesure de probabilité Q équivalente à P telle que le prix actualisé S_t^* de l'action satisfasse une équation différentielle stochastique semblable à (I.17) mais sans la dérive $(\mu - r)S_s^* ds$. Pour ce faire, on utilise la transformation de Girsanov qui permet de modifier la dérive d'un mouvement brownien.

Posons $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ et $\Lambda_t = \exp(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$, $t \in [0, T]$. Par un calcul direct, on montre que $\{(\Lambda_t, \mathcal{F}_t), t \in [0, T]\}$ est une martingale positive sous P . Définissons Q sur (Ω, \mathcal{F}) par :

⁷ Un tel marché est dit *viable*.

⁸ Une telle mesure de probabilité est appelée mesure martingale ou probabilité risque-neutre.

$$\frac{dQ}{dP} = \Lambda_T \quad \text{sur } \mathcal{F} \quad \text{i.e } Q(A) = E^P [1_A \Lambda_T], \quad A \in \mathcal{F} \quad (\text{I.18})$$

Remarquons que Q est bien une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) . En effet, comme $\{(\Lambda_t, \mathcal{F}_t), t \in [0, T]\}$ est une P -martingale, $Q(\Omega) = E^P [\Lambda_T] = E^P \left[E^P \left[\frac{\Lambda_T}{\mathcal{F}_0} \right] \right] = \Lambda_0 = 1$.

De plus, comme $\Lambda_T > 0$, il vient que pour chaque $A \in \mathcal{F}$, $Q(A) = 0$ si et seulement si $P(A) = 0$. Ce qui montre que Q est équivalente à P .

Pour terminer, montrons que les prix actualisés des actifs sont des Q -martingales.

- L'actif sans risque B actualisé a un prix constant égal à 1 donc c'est une Q -martingale.
- En ce qui concerne l'actif risqué dont le prix actualisé est S_t^* , posons :

$\tilde{W}_t = W_t + \theta t$, $t \in [0, T]$, par le théorème de Girsanov, nous déduisons que $\left\{ \left(\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t \right), t \in [0, T] \right\}$ est mouvement brownien standard sous Q . Ainsi, pour tout, en utilisant (2.14) nous avons :

$$\begin{aligned} S_t^* &= S_0 \exp \left(\left(\mu - r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \left(\tilde{W}_t - \theta t \right) \right) \\ &= S_0 \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t + \sigma \tilde{W}_t \right), \quad \text{et } P\text{-p.s } dS_t^* = \sigma S_t^* d\tilde{W}_t, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

où \tilde{W}_t est un mouvement brownien standard sous Q et on vérifie immédiatement que (I.19) est une Q -martingale par rapport à $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$.

I-2-5 Valorisation de l'option

i) Considérons le portefeuille autofinçant ϕ introduit au paragraphe précédent de valeur $V_t(\phi) = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$. D'après (I.14), sa valeur actualisée $V_t^*(\phi)$ vérifie $V_t^*(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \alpha_s dS_s^*$, pour tout $t \in [0, T]$ et définit donc une Q -martingale. Nous pouvons donc écrire : $V_t^*(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi) = E^Q \left[e^{-r(T-t)} V_T(\phi) / \mathcal{F}_t \right]$ (propriété des martingales).

Un tel portefeuille est dit *admissible*.

ii) Aussi, supposons (a priori) l'existence d'une fonction $(t, S_t) \rightarrow C(t, S_t) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_+)$ telle que sa valeur-limite lorsque t tend vers T soit égale au pay-off de l'option. Dans le cas particulier d'un Call européen, on écrit : $\lim_{t \rightarrow T} C(t, S_t) = \max(S_T - K, 0)$. Formons un portefeuille φ constitué d'une part de l'option (Call) et d'un portefeuille autofinçant $(\alpha, \beta, C(0, S_0))$ emprunté sur le marché. La valeur à l'instant t de φ est : $V_t(\varphi) = C(t, S_t) - \alpha_t B_t - \beta_t S_t$. En particulier, sa valeur est nulle⁹ à l'instant initial. En faisant le choix de (α_t, β_t) tel que :

$$\alpha_t = \frac{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}}{r B_t} \quad \text{et} \quad \beta_t = \frac{\partial C}{\partial S},$$

il vient par le lemme d'Itô et la propriété d'autofinancement du portefeuille $(\alpha, \beta, C(0, S_0))$ que :

$$\begin{aligned} dV_t(\varphi) &= \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt - \alpha_t dB_t - \beta_t dS_t \\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial S} - \beta_t \right) dS_t + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \alpha_t r B_t \right) dt \quad \text{où l'on a utilisé } dB_t = r B_t dt. \end{aligned}$$

L'on déduit que $dV_t(\varphi) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et par suite $V_t(\varphi) \equiv 0$ pour tout $t \in [0, T]$ donc $C(t, S_t) = \alpha_t B_t + \beta_t S_t$. Ce qui assure l'existence d'un portefeuille répliquant exactement l'option. De plus, on vérifie immédiatement que φ est une stratégie de gestion autofinçante. En effet :

$$\begin{aligned} \int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \beta_s dS_s &= \int_0^t \frac{\partial C}{\partial S} dS_s + \int_0^t \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) ds \\ &= \int_0^t dC \quad \text{car } C(t, S_t) = \alpha_t B_t + \beta_t S_t \\ &= C(t, S_t) - C(0, S_0), \quad \text{d'où le résultat.} \end{aligned}$$

Maintenant en prenant pour φ le portefeuille obtenu ci-dessus, nous voyons que sa valeur terminale $V_T(\varphi)$ est égale au pay-off de l'option $C(T, S_T)$. Ainsi par la loi de l'unique prix (AOA), l'option a pour valeur à la date t :

$$C(t, S_t) = V_t(\varphi) = E^Q \left[\frac{e^{-r(T-t)} V_T(\varphi)}{\varphi_t} \right] \quad (\text{I.20})$$

⁹ En effet, à l'instant initial nous détenons le portefeuille $(\alpha, \beta, C(0, S_0))$ qui est autofinçant : $C(0, S_0) = \alpha B_0 + \beta S_0$.

Dans le cas particulier d'un Call européen, nous avons $C(T, S_T) = \max(S_T - K, 0)$ donc

$$C(t, S_t) = E^Q \left[e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) \middle/ \mathcal{F}_t \right] \quad \text{pour tout } t \in [0, T] \quad (\text{I.21})$$

La formule (I.21) donne le prix implicite du Call européen, nous pouvons aller plus loin dans les calculs. En effet, en remarquant que conditionnellement à \mathcal{F}_t , $\ln S_T \rightarrow \mathcal{N} \left(\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t); \sigma^2(T-t) \right)$, donc la densité de $\ln S_T$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{T-t}}} \exp \left(-\frac{\left(x - \left(\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right) \right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right) \quad (\text{I.22})$$

Au total, le prix du Call européen s'écrit :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(e^x - K; 0) f(x) dx = e^{-r(T-t)} \left[\int_{\ln K}^{+\infty} e^x f(x) dx - K \int_{\ln K}^{+\infty} f(x) dx \right] \quad \text{et en}$$

utilisant la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, on peut écrire explicitement :

$$C_t(S_t, K, T, r) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (\text{I.23})$$

$$\text{avec } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln \left(\frac{S_t}{K e^{-r(T-t)}} \right) + \frac{1}{2} \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\text{et } d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln \left(\frac{S_t}{K e^{-r(T-t)}} \right) - \frac{1}{2} \sigma\sqrt{T-t} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

On obtient ainsi la célèbre **formule de Black et Scholes**.

Remarques

La simplicité du modèle de Black et Scholes en a fait la référence absolue dans la modélisation mathématique et la gestion des risques financiers. Toutefois, malgré son caractère pratique il présente quelques insuffisances dont :

- *La mauvaise spécification de la distribution du processus du sous-jacent :*

Des tests statistiques ont conduit à rejeter l'hypothèse suivant laquelle le logarithme du rendement du sous-jacent suit une loi normale et que ses incréments sont indépendants¹¹ ;

¹⁰ Cette formule justifie donc a posteriori l'hypothèse que nous avons faite sur la régularité de $C(\dots)$

- *Smile de la volatilité :*

Alors que le modèle suppose une volatilité constante, l'inversion de la formule de Black et Scholes fournit pour chaque prix d'option une volatilité. On obtient ainsi une fonction non constante dont la courbe représentative possède une forme caractéristique qui lui donne le nom de « Smile ».

Ces remarques donnent le sujet du paragraphe suivant où nous discutons des deux principales lacunes que présente le modèle classique de Black et Scholes.

I-3 Les imperfections du Modèle de Black et Scholes/Merton

Nous commençons par aborder les questions liées à la dynamique du sous-jacent. En particulier l'hypothèse selon laquelle il suivrait un mouvement Brownien géométrique.

I-3-1 Sur le caractère Brownien de la dynamique du sous-jacent

Dans le modèle de Black et Scholes, le rendement de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique, donc est à trajectoires continues. Mais l'observation attentive de l'évolution des cours sur les marchés financiers fait remarquer, à la suite d'une information subite¹², un changement instantané de régime semblable à un saut (vers le haut ou vers le bas) qui rompt la continuité des trajectoires des cours. Ceci relève le caractère naturellement discontinu des cours boursiers.

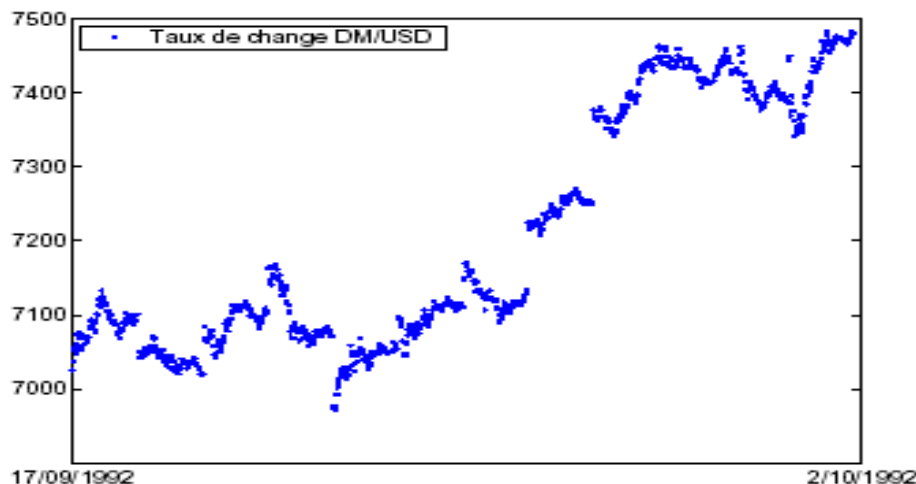


Figure 1 : Sauts (discontinuités) dans la trajectoire du taux de change Deutschmark/dollarUS dans un intervalle de 5 minutes.

Benoît Mandelbrot (1963) a montré, sur la base de séries chronologiques sur les cours du Coton aux USA, que :

¹¹ Pour des intervalles de temps inférieurs au quart d'heure, il a été prouvé l'existence d'une corrélation entre les incréments du logarithme

¹² Les attentats de Londres par exemple !

- Les changements de prix de mois en mois suivent la même distribution que les changements de jour en jour (propriété d'autoaffinité ou de stabilité) ;
- La discontinuité est très présente dans le processus selon la valeur d'un paramètre libre « alpha » qui vaut 2 dans la distribution de Gauss et dans un mouvement brownien standard, mais est inférieure à 2 dans les « distributions stables ». En particulier, ce paramètre valait 1.7 pour la série étudiée ;
- Il survient souvent dans le processus de prix des « évènements rares »¹³, ce que ne rend pas compte un modèle brownien du fait qu'il sous-estime fortement la fréquence de ceux-ci.

Au total, l'observation empirique penche pour une distribution du sous-jacent qui serait asymétrique (étalée vers la droite), plus effilée que la distribution normale et qui aurait des queues épaisses ou « lourdes » en comparaison de la distribution normale. Une telle distribution devra en outre rendre compte des sauts (discontinuités) observés sur les marchés.

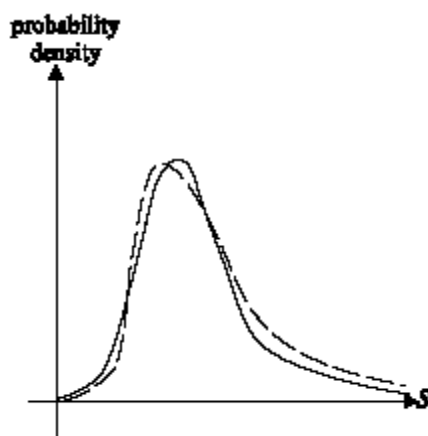


Figure 2 : Comparaison entre la densité de probabilité observée du processus du prix d'un actif (trait continu) et la densité log-normale prédite par le modèle de Black et Scholes (trait pointillé).

I-3-2 Le problème du « Smile » de la volatilité

Le modèle de Black et Scholes permet de calculer le prix d'un Call européen connaissant S le prix du sous-jacent, K le prix d'exercice de l'option, r le taux d'intérêt sans risque, σ la volatilité, T la maturité et t le temps écoulé depuis l'émission. Tous les paramètres sont connus (K , T , t) ou sont observables (S , r) sauf la volatilité, qui doit donc être estimée. Mais le modèle de Black et Scholes suppose une volatilité constante, or cela n'est absolument pas le cas dans la réalité. En effet, connaissant une fourchette des prix de marché du Call obtenus par la loi de l'offre et de la demande, on peut en inversant la formule de Black et Scholes déduire pour chaque prix une valeur unique pour la volatilité qui correspond à ces différentes cotations (ainsi la vraie volatilité du marché). Cette volatilité est appelée volatilité implicite et notée $\sigma^{\text{implicite}}$ et est solution de l'équation:

$$C_t^{\text{Observé}}(S_t = x, T, K) = C_t^{\text{Black-Scholes}}(S_t = x, T, K, \sigma^{\text{implicite}}) \quad (\text{I.24})$$

¹³ Il s'agit des évènements qu'on qualifie de risques extrêmes en Statistique des processus.

Les graphes suivants mettent en évidence le « Smile » ou dépendance convexe de la volatilité par rapport au strike K et la maturité T.

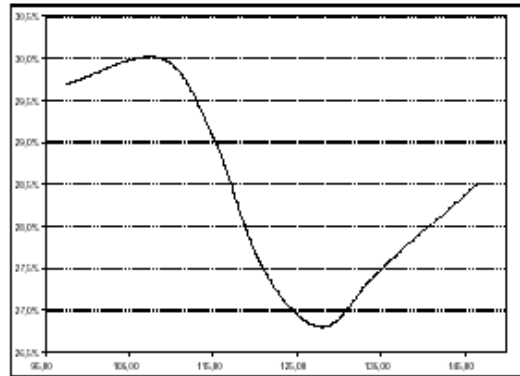
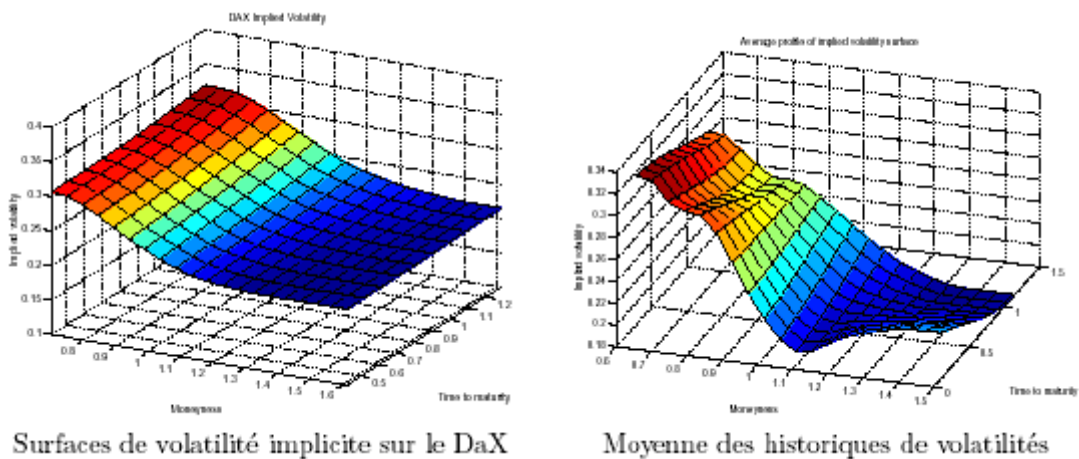


Figure 3 : Smile de volatilité observée sur le taux de change mensuel du Dollar/yen le 09/10/1988



Surfaces de volatilité implicite sur le DaX

Moyenne des historiques de volatilités

Figure 4 : Nappes de volatilités implicites en fonction du strike K et de la maturité T

Remarques

Pour pallier les différents écueils relevés précédemment et, en particulier pour reconstruire le « smile » de la volatilité, de nombreuses extensions du modèle de Black et Scholes ont été proposées dans la littérature spécialisée. Ces différents modèles peuvent être groupés en trois grandes classes :

- les modèles à volatilité dépendant du temps et du prix du sous-jacent ;
- les modèles à volatilité stochastique dans lesquels la volatilité du sous-jacent est un processus stochastique gouverné par un deuxième bruit (Brownien ou autre) corrélé à celui du sous-jacent ;
- et les modèles de diffusion à sauts.

CHAPITRE II : EXTENSIONS DU MODÈLE DE BLACK ET SCHOLES :

LES MODÈLES EXPONENTIELLE-LÉVY

Cette section présente une des extensions du modèle de Black et Scholes les plus courantes dans la littérature spécialisée. En relâchant l'hypothèse de la normalité des incréments de la dynamique du sous-jacent, les modèles de Lévy (ou exponentielle-Lévy) offrent plus d'une source d'incertitude permettant ainsi d'intégrer des faits observés comme la discontinuité (présence des sauts) de la dynamique du sous-jacent.

II.1 Définitions générales et Principales propriétés

II.1.1 Généralités sur les processus de Lévy

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}, P)$ un espace probabilisé filtré complet satisfaisant les conditions habituelles¹⁴. Un processus adapté $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ avec $X_0 = 0$ est un *processus de Lévy* si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- X est à accroissements indépendants: i.e pour tout n-uple $(t_1, \dots, t_n) \in ([0, T])^n$ tel que $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les variables $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ sont indépendantes
- X est à accroissements stationnaires : i.e pour tout $t \in [0, T]$ et tout $h > 0$ tel que $t + h \in [0, T]$, la loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend que de h

X_t est continue en probabilité :

$$i.e, \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ et quelque soit } \varepsilon > 0, \lim_{s \rightarrow t} P(|X_t - X_s| > \varepsilon) = 0.$$

La loi d'un processus de Lévy est entièrement déterminée par un triplet caractéristique (σ, ν, γ) où $\sigma \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$ et ν est une mesure positive sur \mathbb{R} vérifiant :

$$\nu(\{0\}) = 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \min(x^2, 1) \nu(dx) < \infty$$

En particulier, la fonction caractéristique $\Phi^{X_t}(\lambda)$ de X_t se déduit à partir de triplet à travers le résultat suivant :

i.e : (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace probabilisé complet

¹⁴ – Tous les P^* ensembles négligeables de \mathcal{F}_0

– $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ est une filtration continue à droite (i.e $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ pour tout $t > 0$)

Théorème (représentation de Lévy-Khintchine)

Il existe une fonction $\Psi :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Phi^{X_t}(\lambda) &= E\left[e^{i\lambda X_t}\right] = e^{t\Psi(\lambda)}, \text{ avec} \\ \Psi(\lambda) &= i\gamma\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x 1_{\{|x|<1\}}\right) \nu(dx) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Ψ est appelé **exposant de Lévy-Khintchine**.

Preuve : Voir « An introduction to Lévy Processes » de J.Bertoin (1997)

Remarques

a) La mesure ν qui n'est généralement pas une mesure de probabilité est appelée **mesure de Lévy**. Lorsque $\int_{\mathbb{R}} \nu(dx) < \infty$. Le processus de Lévy est dit à activité finie¹⁵ et ν peut

donc être transformée sur \mathbb{R} en une mesure de probabilité $\mu = \frac{\nu(dx)}{\int_{\mathbb{R}} \nu(dx)}$. Cette dernière est

interprétée comme la distribution des sauts du processus.

b) Un processus de Lévy se décompose généralement en une partie brownienne, une partie déterministe linéaire (représentée par le terme γ -tendance ou dérive) et une partie caractérisant les sauts purs.

c) Les mouvements browniens, les processus de Poisson et de Poisson composés sont des exemples de processus de Lévy.

II-1-2 Les modèles exponentielle-Lévy

Les modèles exponentielle-Lévy sont obtenus en remplaçant dans le modèle de Black et Scholes la dynamique du sous-jacent (actif risqué) par la suivante :

$$S_t = S_0 e^{rt + X_t} \quad (\text{II.2})$$

où X_t est un processus de Lévy sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}, P)$ de triplet caractéristique (σ, γ, ν) et r le taux d'intérêt instantané.

Exemples de modèle exponentielle-Lévy

Les différents modèles exponentielle-Lévy proposés dans la littérature financière se distinguent par le choix de la mesure ν . Et on peut les regrouper en deux grands groupes

¹⁵ Ce qui signifie que le nombre de sauts arrivant à l'instant infinitésimal dt est fini.

suivant la nature finie ou non de ν : i) les modèles à ν finie (ou à activité finie) et ii) les modèles à activité infinie.

Nous présentons dans chaque cas le modèle le plus courant.

1) Un modèle à activité finie : le modèle de Merton (1976)

Ici le processus de prix du sous-jacent sous P, est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dB_t + \eta dN_t \tag{II.3}$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard ; $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ i.e un processus défini par :

$$dN_t = \begin{cases} 0 & \text{avec la probabilité } 1 - \lambda dt \\ 1 & \text{avec la probabilité } \lambda dt \end{cases}$$

Ainsi définie, N_t est une fonction d'impulsion produisant un saut de S à $S(1 + \eta)$. σ est la volatilité du sous-jacent. La distribution de $\log(1 + \eta)$ est supposée normale, de façon précise, sa densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} est :

$$g_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} e^{-\frac{(x-\mu_M)^2}{2\sigma_M^2}} \tag{II.4}$$

On dit que le modèle de Merton admet des sauts gaussiens. On peut montrer en utilisant la formule d'Itô que $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + \eta_i)$ est (la) solution de (II.3) où les η_i sont des variables aléatoires i.i.d suivant la loi de η . On identifie clairement le processus de Lévy ici par son exposant caractéristique :

$$\Psi(u) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \mu \left\{ e^{-\frac{\sigma_M^2 u^2}{2} + i\mu_M u} - 1 \right\} - iu \left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu \left(e^{\frac{\sigma_M^2}{2} + \mu_M} - 1 \right) \right) \tag{II.5}$$

et sa mesure de Lévy $\nu(dx) = \lambda g_\eta(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} e^{-\frac{(x-\mu_M)^2}{2\sigma_M^2}}$; la dérive ou tendance est égal ici à $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ et la volatilité σ .

2) Un modèle à activité infinie : le modèle Variance-Gamma (VG) (Madan, Carr et Chang, 1998)

Dans le modèle Variance-Gamma, le logarithme du prix du sous-jacent suit un mouvement Brownien avec la particularité que l'unité de temps ici est supposée avoir une valeur économique aléatoire suivant une certaine loi Gamma.

De façon concrète, on définit le processus $\{G(t, \kappa)\}_{t \geq 0}$, qui est à accroissements indépendants, identiquement distribué sur des intervalles de temps disjoints de longueur $h = \Delta t$ suivant la loi Gamma de paramètres $\left(\frac{h}{\kappa}, \kappa\right)$; considérons aussi le processus $\{X_t\}_{t \geq 0}$ défini par :

$$X_t(\sigma, \kappa, \theta) = \theta G(t, \kappa) + \sigma B(G(t, \kappa)) \tag{II.6}$$

où $\theta, \sigma \in \mathbb{R}$ et $B(t)$ désigne le mouvement Brownien standard.

Il vient alors que la dynamique du sous-jacent s'écrit :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + X_t(\sigma, \kappa, \theta) + \frac{t}{\kappa} \ln\left(1 - \theta\kappa - \frac{\kappa\sigma^2}{2}\right)\right) \tag{II.7}$$

L'exposant caractéristique du processus de Lévy dans ce cas s'écrit :

$$\Psi(u) = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{u^2\sigma^2\kappa}{2} - i\theta\kappa u\right) \tag{II.8}$$

Dans ce modèle, la mesure de Lévy est définie par $\nu(dx) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{|x|} e^{-\lambda_-|x|} 1_{x < 0} + \frac{1}{x} e^{-\lambda_+x} 1_{x > 0}\right)$

avec $\lambda_+ = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2/\kappa} - \mu}{\sigma^2}$ et $\lambda_- = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2/\kappa} + \mu}{\sigma^2}$ et il n'y a pas de composante brownienne.

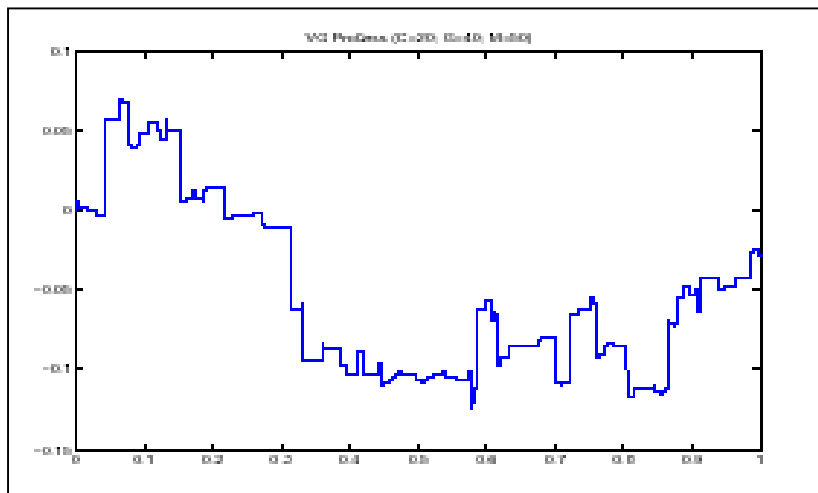


Figure 5 : Graphe d'un Processus Variance-Gamma

II-2 Le problème du pricing dans un modèle exponentielle-Lévy

Nous rappelons ici que le problème du pricing est compris comme le problème de la valorisation d'un Call européen. On peut en déduire la valeur du Put en remarquant qu'un Put sur S_T de maturité T et de strike (K) peut être vu comme un Call sur $(-S_T)$ de même maturité T et de strike $(-K)$.

Le principe de la valorisation d'une option européenne dans un modèle exponentielle-Lévy ne s'éloigne guère de ce qui a été fait dans le modèle classique de Black et Scholes. Il est question de trouver une mesure de probabilité particulière Q^{16} équivalente à la mesure de probabilité historique P et, sous laquelle la valeur actualisée de l'option définit une martingale. Mais, la présence des sauts dans la dynamique du sous-jacent entraîne l'incomplétude du marché. Ceci a pour conséquence l'existence, non pas d'une mais de plusieurs mesures martingales. En général, l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage ne suffit plus pour assurer l'unicité d'une mesure-martingale dans le cadre du modèle exponentielle-Lévy (voir Delbaen, F. et Schachermayer, W., 1994, *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*).

Nous considérons comme résolu le problème de l'existence et de l'unicité d'une mesure martingale Q . Dès lors le problème est ramené à un calcul explicite du prix du Call d'après la formule :

$$C(t, T, K, S) = e^{-r(T-t)} E^Q \left[\frac{\max(S_T - K; 0)}{S_t = S} \right] \quad (\text{II.9})$$

II-2-1 La méthode de Fourier

Les modèles exponentielle-Lévy offrent une très grande flexibilité pour l'évaluation des options, notamment à travers l'utilisation de la transformée de Fourier du processus de Lévy. Nous rappelons que le prix du Call européen à l'instant initial est donné par la formule :

$$C(0, T, K, S_T) = e^{-rT} E^Q [\max(S_T - K; 0)] \quad (\text{II.10})$$

Considérons le changement de variable $k = \ln K; s_T = \ln S_T$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} C(k, T) &= e^{-rT} E^Q [\max(e^{s_T} - e^k; 0)] \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} [(e^s - e^k) 1_{s < k, k < 0} + (e^s - e^k) 1_{s > k, k > 0}] q_T(s) ds \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

où $s \rightarrow q_T(s)$ est la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} de la mesure de probabilité risque neutre Q à la maturité.

Le principe de la méthode de Fourier consiste à regarder le prix du Call comme la transformée inverse d'une transformée de Fourier d'une certaine fonction. Ainsi, si nous

¹⁶ Q est alors appelée mesure- martingale ou mesure risque-neutre.

regardons le prix de Call comme une fonction $c_T(k)$ du logarithme de son strike, alors sa transformée de Fourier s'écrit $\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} c_T(k) dk$ ¹⁷ et il suffit de passer par la transformée inverse de Fourier pour déduire le prix du Call.

En général, la fonction $c_T(k)$ n'est pas intégrable alors il faut des conditions supplémentaires pour faire le calcul. Le théorème suivant précise ces conditions.

Théorème (Carr et Madan)

Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus de Lévy réel tel que $\{\exp(X_t)\}_{t \geq 0}$ soit une martingale vérifiant la propriété $E[e^{(1+\alpha)X_t}] < \infty$ pour un réel $\alpha > 0$. Dans ces conditions, la transformée de Fourier de $c_T(k)$ est donnée par la formule :

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} c_T(k) dk = e^{ivrT} \frac{\Phi_T(v-i) - 1}{iv(1+iv)} \tag{II.12}$$

Où $\Phi_T(\cdot)$ est la fonction caractéristique du processus de Lévy $\{X_t\}_{t \geq 0}$.

Preuve :

Comme $\{\exp(X_t)\}_{t \geq 0}$ est une martingale, $E^Q[e^{X_T}] = E^Q[e^{X_0}] = 1$. Si on pose $X_T = x$. Alors il vient de (II.11) que :

$$C(k, T) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} [(e^{rT+x} - e^k)(1_{k < rT+x} - 1_{k < rT})] \mu_T(x) dx$$

où $\mu_T(\cdot)$ désigne la densité de X_T

Et par suite,

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} c_T(k) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} c_T(k) dk \int_{-\infty}^{+\infty} [(e^{rT+x} - e^k)(1_{k < rT+x} - 1_{k < rT})] \mu_T(x) dx$$

Et la condition $E[e^{(1+\alpha)X_t}] < \infty$ permet d'invertir les signes d'intégration dans le dernier membre, il vient :

$$\psi_T(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_T(x) dx \left\{ \frac{e^{ivrT} (1 - e^{-x})}{iv + 1} - \frac{e^{x+ivrT}}{iv(iv + 1)} + \frac{e^{(iv+1)x+ivrT}}{iv(iv + 1)} \right\}$$

¹⁷ Sous réserve que $c_T(\cdot)$ soit $L^1(\mathbb{R})$.

Mais $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{ivrT}(1-e^x)}{iv+1} \right) \mu_T(x) dx = 0$ à cause de l'égalité $E^Q[e^{x_T}] = E^Q[e^{x_0}] = 1$. En

réduisant au même dénominateur sous le signe intégrale les deux derniers termes, il vient finalement que :

$$\psi_T(v) = e^{ivrT} \frac{\Phi_T(v-i)-1}{iv(1+iv)} \text{ d'où le résultat.}$$

Pour terminer, l'obtention du prix du Call se fait en utilisant les algorithmes de la Transformée de Fourier rapide (FFT). Concrètement, nous approximons le prix du Call $c_T(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} \psi(v) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ivk} \psi(v) dv$ ¹⁸ par une somme selon la méthode d'intégration numérique des trapèzes. Ainsi, nous avons :

$$c_T(k) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iv_j k} \psi(v_j) h \text{ avec } v_j = h^*(j-1), h \text{ est le pas.}$$

Nous choisissons N¹⁹ assez grand, en fait il s'agit d'un passage à la limite à l'infini.

II-2-2 La méthode de Monte-Carlo

Il s'agit des techniques générales d'intégration numérique se basant sur des simulations d'échantillons aléatoires. Dans le cas concret qui nous concerne, le principe de calcul de $C(0, T, K, S_T) = e^{-rT} E^Q[\max(S_T - K; 0)]$ est le suivant :

- on simule un grand nombre N de trajectoires du processus de Lévy sous Q du sous-jacent;
- on calcule à la date T le pay-off pour chacune des trajectoires simulées ;
- on actualise ces résultats en les multipliant par le facteur e^{-rT} ;
- on prend la moyenne sur les N chiffres obtenus à l'étape c), on obtient ainsi une estimation du prix du Call.

Il faut noter qu'ici l'enjeu se situe au niveau de la recherche d'estimateur convergeant assez rapidement vers la variable d'intérêt qu'est l'intégrale à calculer. Dans le cas de la méthode de Monte-Carlo. La vitesse de convergence s'exprime en terme variance. On cherche alors à réduire la variance. Plusieurs techniques de réduction de la variance sont présentées dans la littérature [7]. On peut citer principalement :

- la technique de l'échantillonnage préférentiel ;
- la technique utilisant une variable de contrôle ;
- la technique des variables antithétiques ;
- la méthode de stratification.

¹⁸ Car la fonction $v \rightarrow \psi(v)$ est impaire dans ses parties imaginaire et réelle.

¹⁹ Ce choix est guidé par le degré de précision voulue.

Remarque

Dans la littérature, pour obtenir des expressions explicites du prix du Call, outre les méthodes de Fourier et Monte-Carlo que nous avons présentées précédemment, il existe une autre façon de valoriser un Call européen. Dans cette approche, on procède par résolution numérique de l'EDP suivie par le prix de Call. Le défaut de cette approche est qu'il faut traiter séparément les questions d'existence et d'unicité de la solution, ce qui suppose d'introduire des conditions plus fortes.

II-3 Le problème de calibration dans les modèles exponentielle-Lévy

II-3-1 Position du problème

De façon générale, on entend par calibration d'un modèle, l'exercice consistant à identifier correctement les paramètres du modèle afin que celui-ci représente assez fidèlement la réalité qu'il est censé décrire. Dans le cas spécifique des modèles financiers, il s'agit d'identifier clairement le processus stochastique modélisant l'actif sous-jacent à partir des options. Dans le cas particulier du modèle de Black et Scholes il s'agit de déterminer de façon aussi précise que possible la volatilité à partir des prix d'options observés sur le marché.

Dans le cadre d'un modèle exponentielle-Lévy, le problème se pose en ces termes :

Étant donné les prix des options d'achat (Call) $C_0^*(T_i, K_i), i \in I$ observés sur le marché à l'instant initial $t=0$, construire un processus de Lévy $\{X_t\}_{t \geq 0}$ tel que le prix actualisé de l'actif sous-jacent $S_t e^{-rt} = \exp X_t$ soit une martingale et que les prix des options d'achat observés sur le marché coïncident avec les prix prédits par le modèle exponentielle-Lévy induit par X i.e :

$$\forall i \in I, C_0^*(T_i, K_i) = e^{-rT_i} E \left[(S_{T_i} - K_i)^+ / S_0 \right] = e^{-rT_i} E \left[(S_0 e^{T_i + X_{T_i}} - K_i) \right] \quad (\text{II.13})$$

Nous avons vu précédemment que le processus de Lévy est entièrement déterminé par la donnée d'un triplet caractéristique (σ, γ, ν) ou simplement par son exposant de Lévy-Khintchine $\Psi(\cdot)$.

Si $\{\exp(X_t)\}_{t \geq 0}$ est une Q-martingale, alors $E^Q [e^{X_t} / \mathcal{F}_0] = e^{X_0} = e^0$, pour tout $t > 0$ et il vient pour tout $t > 0$, $E^Q [e^{i(-i)X_t} / \mathcal{F}_0] = e^{X_0} = e^0$ d'où $\Psi(-i) = 0$. Par ailleurs, cette dernière égalité est équivalente à la suivante : $\gamma = \gamma(\sigma, \nu) = -\frac{\sigma^2}{2} - \int (e^y - 1 - y1_{|y| \leq 1}) \nu(dy)$ avec en plus $\int_{|y| > 1} \nu(dy) e^y < \infty$. Nous sommes ainsi amenés à réduire le nombre de paramètres à identifier à 2.

II-3-2 Algorithme de détermination de la volatilité et de la mesure de Lévy

On suppose connus les prix des Call pour une maturité donnée et pour tous les prix d'exercice (strike) possibles, la procédure théorique de détermination de la volatilité et de la mesure de Lévy suit les différentes étapes suivantes :

Calcul de la densité de probabilité risque-neutre du logarithme du prix du sous-jacent à partir des prix des Call par la formule de Breeden-Litzenberger :

$$q_T(k) = e^{-k} \{C''(k) - C'(k)\} \quad \text{où } k = \log K$$

Calcul de la fonction caractéristique Φ_T du prix du sous-jacent à maturité en prenant la transformée de Fourier de q_T .

Déduction de la volatilité par la formule (Sato, 1999) :

$$\sigma^2 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} -\frac{2 \ln \Phi_T(\lambda)}{T \lambda^2}$$

En posant $\xi(u) = \frac{\ln \Phi_T(u)}{T} + \frac{1}{2} \sigma^2 u^2$, on montre dans (Sato, 1999) que :

$$\int_{-1}^{+1} (\xi(u) - \xi(u+z)) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \nu(dx),$$

et du membre de droite de cette dernière inégalité, on déduit par la transformée inverse de Fourier la mesure de Lévy ν .

En somme, si nous connaissons avec précision un ensemble de prix de Call pour tous les strikes et une maturité donnée, on peut déterminer tous les paramètres du modèle exponentielle-Lévy. Malheureusement, la procédure décrite plus haut rencontre de grands écueils dans son implémentation pratique. On peut citer :

- le fait que dans la réalité, l'on ne dispose que d'un nombre fini (généralement des dizaines) de strikes ;
- Si les données de marché concernent des prix de Call de maturités diverses, le problème initial (II.13) n'admettra pas de solution à cause d'une erreur de spécification de modèle. En effet, les Processus de Lévy supposent une homogénéité temporelle dans les accroissements or la diversité des maturités contredit cette hypothèse ;
- Enfin, les erreurs d'observation sur les prix. En effet, sur le marché, le prix est déterminé par fixing²⁰ et il n'est pas aisé de connaître de façon nette le prix de transaction de façon continue.

Tous ces problèmes remettent fondamentalement en cause la procédure théorique, notamment au niveau des étapes de dérivation et du passage à la limite qui ne peuvent plus alors qu'être prises de façon approximative, accentuant ainsi le biais d'erreur et par-là même une instabilité numérique.

Rendu à ce niveau, pour obtenir une solution satisfaite au problème de Calibration dans le modèle exponentielle-Lévy, la littérature spécialisée propose une reformulation en un problème d'optimisation où l'on remplace les égalités (II.13) par une minimisation de l'écart (au sens d'une distance sur l'espace des prix de Call) entre les prix observés sur le marché $C_0^*(T_i, K_i)$, $i \in I$ et les prix prédits par le modèle:

$$(\sigma, \nu) = \arg \inf_{\sigma, \nu} \sum_{i=1}^N \omega_i \left[C^{\sigma, \nu}(t=0, S_0, T_i, K_i) - C_0^*(T_i, K_i) \right]^2 \quad (\text{II.14})$$

²⁰ Procédure technique qui consiste à confronter l'offre (quantité et prix) à la demande (quantité et prix) pour enfin déterminer le prix d'équilibre.

Où $C_0^*(T_i, K_i), 1 \leq i \leq N$ sont les prix du Call observés sur le marché et $C^{\sigma, \nu}(t=0, S_0, T_i, K_i)$ les prix du Call obtenus à partir du modèle exponentielle-Lévy de paramètres (σ, ν) ; les ω_i sont des poids²¹ positifs vérifiant $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$.

Le problème reformulé (II.14) est résolu généralement par des méthodes numériques type gradient-conjugué. Mais, l'on fait face rapidement à deux difficultés majeures :

- un problème d'identifiabilité : l'on ne dispose que d'un nombre fini d'observations pour déduire la loi du processus de Lévy de façon unique ;
- un problème d'instabilité numérique : du fait de la non convexité de la fonctionnelle à minimiser, l'on n'aboutit pas nécessairement au minimum global (présence de minima locaux). Ainsi à partir de conditions initiales légèrement différentes, l'algorithme peut fournir des résultats très éloignés l'un de l'autre.

Il est donc nécessaire d'associer au problème (II.14) des critères de sélection de solution et de régularisation qui permettent d'identifier correctement la bonne solution et assurent la dépendance continue par rapport aux conditions initiales.

II-3-3 Reformulation du problème (II.14)

A la lumière des réserves présentées dans le paragraphe précédent, le problème de Calibration dans un modèle exponentielle-Lévy nécessite une reformulation qui corrige tout à la fois les problèmes d'identifiabilité et de stabilité de la solution. Ainsi, nous définissons le :

Problème de calibration régularisé :

Etant donnés les prix $(C_M = C_0^*(T_i, K_i); i \in \{1, \dots, N\})$ des options cotées sur le marché et un processus de Lévy a priori, trouver un modèle exponentielle-Lévy risque neutre Q^* , tel que :

$$J_\alpha(Q^*) = \inf_Q J_\alpha(Q) \quad (\text{II.15})$$

où le inf est calculé sur tous les modèles exponentielle-Lévy risque neutres, et

$$J_\alpha(Q) = \sum_{i=1}^N \omega_i \left[C^Q(t=0, S_0, T_i, K_i) - C_M(T_i, K_i) \right]^2 + \alpha I(Q/P) \quad (\text{II.16})$$

avec α paramètre de régularisation et où $I(Q/P) = E^P \left[\frac{dQ}{dP} \ln \frac{dQ}{dP} \right]$ désigne l'entropie relative de Q par rapport à P .

²¹ Qui reflètent le degré d'erreur associé à chaque prix d'option relevé sur le marché.

Remarque :

On montre dans [2] que dans le cas où P et Q seraient des processus de Lévy, l'entropie relative $I(Q/P) = E^P \left[\frac{dQ}{dP} \ln \frac{dQ}{dP} \right]$ a une expression explicite :

$$I(Q/P) = \frac{T}{2\sigma^2} \left\{ \gamma^Q - \gamma^P - \int_{-1}^{+1} x(v^Q - v^P)(dx) \right\}^2 + T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dv^Q}{dv^P} \ln \frac{dv^Q}{dv^P} + 1 - \frac{dv^Q}{dv^P} \right) v^P(dx)$$

CHAPITRE III : INTÉRÊT SCIENTIFIQUE DE L'APPROCHE DE DE RAMA CONT ET PETER TANKOV

III-1 Introduction

L'article²² de R. Cont et P. Tankov présente une méthode non-paramétrique pour résoudre le problème de calibration dans les modèles financiers utilisant les processus de Lévy. Plus concrètement, ils reformulent le problème inverse de calibration en un problème de recherche d'un modèle exponentielle-Lévy risque-neutre qui reproduit les prix des options observés sur le marché. Ce dernier problème, vu comme un problème de moment généralisé pour un processus de Lévy est notoirement mal-posé, en ce sens qu'il peut ne pas admettre de solution ou en admettre une infinité, et dans ce dernier cas si par un critère additionnel l'on arrive à en choisir une, la dépendance de cette dernière par rapport aux conditions initiales s'avère discontinue et la conséquence est une instabilité lors de l'implémentation numérique.

Pour contourner les difficultés évoquées plus haut, les auteurs proposent une méthode de régularisation basée sur la minimisation de l'information de Kullback-Leiber encore appelée *entropie relative*, par rapport à un modèle a priori.

Ainsi succinctement présenté, le travail des deux auteurs s'appuie sur le procédé de régularisation utilisant l'entropie relative comme facteur de pénalisation. Par ailleurs, ils discutent de l'implémentation numérique, complément essentiel pour valider l'approche de modélisation adoptée.

La revue de la littérature qui suit va tenter de faire le point sur l'état actuel de la recherche ayant adopté une approche semblable à celle de l'auteur. Elle se focalisera notamment sur l'utilisation de l'entropie relative comme critère de sélection dans les problèmes de calibration. Par la suite, nous dégagerons l'originalité et les contributions de cet article.

III-2 Revue de la littérature

Il est démontré que tous les modèles exponentielle-Lévy à l'exception du modèle de Black et Scholes et du modèle à sauts purs (dans lequel la dynamique du sous-jacent est un processus de Poisson composé) conduisent à des marchés incomplets²³. La conséquence qui en résulte est la multiplicité des mesures martingales (ou risque-neutre) équivalentes à la mesure historique. Dès lors, la recherche s'est développée dans l'optique de trouver un critère de sélection d'une seule parmi toutes les mesures équivalentes risque-neutre. Cette mesure devant être aussi cohérente que possible avec les informations sur les prix observés sur le marché.

²² Il est disponible sur le web à travers l'URL : www.cmap.polytechnique.fr/~rama/papers/entropy.pdf

²³ Notamment à cause de l'incertitude liée aux sauts dans les prix des sous-jacents.

Le critère d'entropie est utilisé pour la première fois par Buchen et Kelly (1996) dans un modèle à une période et généralisé par Avellaneda (1998) dans le cas continu, adaptant ainsi une idée couramment utilisée en Statistique pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire à partir d'un nombre fini de moments de cette loi. Les travaux rencontrés dans la littérature proche du sujet se regroupent en deux grandes approches :

(i) *L'approche d'Avellaneda et al.* qui consiste à minimiser l'entropie relative sur l'ensemble des mesures de probabilité Q équivalentes à la mesure historique P et vérifiant les contraintes :

$$C_M(T_i, K_i) = E^Q \left[e^{-rT_i} \max(S_{T_i} - K_i; 0) \right], \text{ pour } i \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{III.1})$$

Ce problème est mal-posé et les auteurs lui substituent le problème régularisé suivant :

chercher Q^* , équivalente à P telle que

$$Q^* = \arg \min_{Q \sim P} \left(I(Q/P) + \sum_{i=1}^N \left\{ C_M(T_i, K_i) - E^Q \left[e^{-rT_i} \max(S_{T_i} - K_i; 0) \right] \right\}^2 \right) \quad (\text{III.2})$$

et le résolvent par des techniques de simulations à la Monte-Carlo.

(ii) *L'approche théorique avec Föllmer H. et Schweizer M.(1999), M.Frittelli (2000)*, qui dans le cas où l'on ne prendrait pas en compte les contraintes de calibration (III.1), donne des conditions d'existence d'une unique mesure (MEMM)²⁴ martingale minimisant l'entropie relative à un modèle choisi a priori. Par ailleurs, pour prendre en compte les contraintes (III.1), T.Goll et L. Rüschenendorf (2000), Kallsen (2001) introduisent la notion de *consistent minimal entropy pricing martingale measure (CMEMM)* et donnent là-aussi des conditions d'existence dans le cadre de la gestion de portefeuille.

A la lumière de ces travaux antérieurs, nous allons essayer de mesurer la portée de la contribution des auteurs.

III-3 Originalité et Contributions des auteurs

III-3-1 Originalité de l'article

Il est classique depuis l'approche originale de Black et Scholes (1973) d'utiliser les processus de diffusion pour évaluer les rendements des actifs et les prix des options sur un marché financier. Mais le modèle classique de Black et Scholes n'explique pas certains faits empiriques tels le « Smile » (asymétrie et profil effilé) de volatilité, ce qui a conduit dans la littérature à introduire les processus plus généraux de Lévy dans l'évaluation des options. Une classe particulière de ces processus est constituée par les processus exponentielle-Lévy dans lesquels le prix de l'actif sous-jacent s'écrit $S_t = \exp(rt + X_t)$, $t \geq 0$.

Partant d'une analyse fine des principales propriétés d'un modèle exponentielle-Lévy, les auteurs exploitent l'idée que, contrairement à l'hypothèse du modèle de diffusion où

²⁴ Minimal entropy martingale measure (MEMM)

différentes structures de volatilité conduisent à des mesures de probabilité singulières (non-équivalentes) sur l'espace des trajectoires et donc à des entropies relatives infinies, deux processus de Lévy de mesures de Lévy différentes peuvent définir des probabilités équivalentes. Dès lors, l'entropie relative des modèles exponentielle-Lévy associés est simplement une fonction de leurs mesures de Lévy et peut donc être employée comme critère (stable) de régularisation du problème inverse de Calibration. Cette approche de régularisation ne recherche pas directement la valeur de la volatilité du processus, mais plutôt une mesure de Lévy qui se rapproche le plus (au sens de la distance d'entropie) d'une mesure donnée a priori. Ainsi de façon tout à fait originale, les auteurs apportent une solution rigoureuse à un problème inverse non-linéaire de dimension infinie.

III-3-2 Contributions des auteurs

L'approche développée dans l'article apporte une solution rigoureuse aux lacunes présentes dans les études que nous avons évoquées dans la revue de la littérature :

Par rapport à l'approche d'Avellaneda et al.

La technique de calibration du *Weighted MonteCarlo* développée par Avellaneda et al. consiste à déterminer directement par simulation les probabilités risque-neutre des états futurs du marché (ou du sous-jacent) par minimisation de l'analogue discret de (III.2). Concrètement, ils considèrent $N < \infty$ trajectoires fixées $\{X^1, \dots, X^N\}$ que peut suivre le cours du sous-jacent, simulées à partir d'une loi a priori P . Sur le nouvel espace d'états $\Omega' = \{X^1, \dots, X^N\}$ qui est fini, ils posent comme mesure de probabilité a priori la loi uniforme définie par $P'(\{X^i\}) = \frac{1}{N}, \forall i \in \{1, \dots, N\}$ et les probabilités risque-neutre (poids) $q_i = Q(X^i)$ sont obtenues comme solutions de :

$$\max - \sum_{i=1}^N q_i \log q_i \quad \text{s.c } E^{Q'} [H_j] = C_j, j = 1, \dots, M$$

où les H_j (resp. C_j) désignent les pay-off terminaux (les gains) de M options cotées sur le marché.

Plusieurs lacunes subsistent dans cette approche: - en premier, la mesure de probabilité Q obtenue par calibration est définie sur un espace d'états fini donc elle ne peut décrire correctement le processus continu suivi par le sous-jacent ; -en second, la condition que Q doit être une mesure martingale ou risque-neutre n'est pas imposée ici, la conséquence immédiate est la possibilité d'aboutir à des opportunités d'arbitrage avec le modèle résultant.

Par rapport à l'approche théorique

L'unique lacune que l'on peut porter ici est la difficulté d'associer au résultat d'existence un algorithme numérique permettant d'obtenir pratiquement la mesure CEMM. Ceci étant dû pour une grande part au fait si X est un processus de Lévy sous la mesure de probabilité historique, il ne le demeure pas en général sous la mesure martingale consistante (CEMM).

Une autre contribution importante des auteurs est l'implémentation numérique de leur modèle.

Approximation numérique du problème

La recherche d'une procédure pratique de détermination des paramètres du modèle occupe une place importante dans l'article. Les questions qui se posent sont, au-delà de la mise en œuvre de l'algorithme numérique elle-même, sont celles de la convergence de la solution du schéma discrétisé vers la solution réelle.

Le problème discrétisé consiste à chercher une mesure discrète ν^* définie sur une partition $\pi = (-M = x_1 < \dots < x_N = M)$ de l'intervalle $[-M, +M]$:

$$\nu^* = \arg \inf_{\nu \in L_\pi} J_\alpha(\nu) \text{ avec } L_\pi = \left\{ \sum_{x \in \pi} a(x) \delta_x, \quad a \in (\mathbb{R}^+)^{\pi} \right\}$$

$$\text{et où } J_\alpha(\nu) = \sum_{i=1}^N \omega_i \left[C^Q(t=0, S_0, T_i, K_i) - C_M(T_i, K_i) \right]^2 + \alpha H(\nu) .$$

$H(\nu)$ désigne l'entropie relative de la mesure risque-neutre par rapport à une mesure choisie a priori.

Les auteurs démontrent que :

i) Le problème discrétisé est bien posé et admet une solution quel que soit la partition π . De plus, si le coefficient de volatilité σ est non nul et pour α assez grand, il y a unicité de la solution.

ii) Toute solution ν^* du problème discrétisé dépend continûment des vecteurs-prix des options $(C_M(T_i, K_i), i = 1, \dots, N)$ observés sur le marché et, pour un choix convenable de α , converge vers la solution réelle quand l'erreur sur les prix tend vers zéro.

Nous terminons en présentant l'algorithme numérique de résolution du problème discrétisé :

- Choix des poids ω_i à affecter à chaque option dans la fonction-objectif ;
- Choix de la mesure a priori \mathbb{Q}_0 à partir des données ;
- Choix du paramètre de régularisation α ;
- Résolution du problème d'optimisation pour α et \mathbb{Q}_0 choisis précédemment par une méthode du gradient-conjugué.

Pour valider leur programme, les auteurs procèdent à des tests tant sur des données simulées que réelles.

CHAPITRE IV : SIMULATIONS NUMERIQUES

Au-delà des formules analytiques obtenues dans un nombre très limité des cas, la modélisation en finance mathématique donne le plus souvent lieu à des solutions numériques. Ces dernières sont obtenues généralement suivant deux grandes voies qui sont :

- La résolution numérique par des méthodes des différences finies ou éléments finis des EDP ou EDP intégro-différentielles de valorisation d'option ;
- Les techniques d'intégration à la Monte-Carlo ou techniques de simulation probabilistes.

La première méthode renvoie à l'analyse numérique et est d'un usage ardue voire quasi-impossible lorsque la dimension du problème devient élevée, on lui préfère alors la seconde qui se comporte assez bien en dimension élevée. En effet, la vitesse de convergence d'une estimation de Monte-Carlo ne dépend pas de la dimension. En plus, le théorème Central-Limite nous fournit un encadrement de l'estimation (intervalle de confiance).

Ceci dit, cette section sera consacrée aux simulations numériques à la Monte-Carlo qui approchent les formules analytiques obtenues dans les chapitres précédents.

IV-1 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

IV-1-1 Calcul explicite par la formule analytique

Nous implémentons sous le logiciel R la formule de Cox-Ross-Rubinstein (I.3) pour le calcul d'un Call européen à un instant t . Concrètement, nous construisons une fonction qui prend en arguments les paramètres u , d , S_0 , K , t et r et renvoie la valeur du Call européen C_t .

Programme de Calcul d'un Call européen dans un modèle binomial à n périodes

```
CRREurCall<-function(u,d,n,St,K,r,t) {
  #calcule la valeur du Call en utilisant la formule de Cox-Ross-Rubinstein

  q<-((1+r)-d)/(u-d)      #Calcul de la probabilité risque- neutre q

  if (q<=0|q>=1) {paste("possibilité d' arbitrage")}else{
    if ( t>=n ) {paste ("temps t non valable")}else{
      summand<-rep(0,n-t)      #Calcul de la somme
      for (j in 1:n-t) {
        summand[j]<-max((St*(u)^j*(d)^(n-t-j)-K),0)*q^j*(1-q)^(n-t-j)*choose(n-t,j)
      }
      Callvalue<-(sum(summand))*(1+r)^(-(n-t))
      return(Callvalue)
    }
  }
}
```

IV-1-2 Simulation Monte-Carlo du modèle binomial

Nous procédons ici au calcul du Call européen dans un modèle binomial par simulation à la Monte Carlo. Pour ce faire, nous simulons un grand nombre de trajectoires possibles du sous-jacent (il s'agit en fait des simulations des mouvements haussiers (ups) et baissiers (downs)), et calculons pour chacune d'elle le pay-off actualisé du Call. Enfin, la valeur estimée du Call est obtenue en faisant la moyenne arithmétique sur le vecteur des pay-off actualisés.

Programme de Calcul d'un Call européen dans un modèle binomial à n périodes par simulation de trajectoires

```

CRRSimulation<-function(u,d,n,St,K,r,t,repetitions){
  #On simule les hauts(u) et les bas (d) dans un arbre binomial

  q<-((1+r)-d)/(u-d)      #Calcul de la probabilité risque- neutre q

  if (q<=0|q>=1) {paste("possibilité d' arbitrage")}else{
    if ( t>=n ){paste ("temps t non valable")}else{

  #simulation des trajectoires par simulation du nombre de hauts(u) et de bas(d)
  paths<-rbinom(repetitions,n-t,q)
  payoff<-St*((u)^paths*(d)^(n-t-paths))-K # on calcule le pay-off du Call
européen
  payoff[payoff<0]<-0
  # valeur du Call estimée et variance estimée de l'estimateur
  Callvalue<- mean((1+r)^(-(n-t))*(payoff)) ;vCallvalue<- var((1+r)^(-(n-
t))*(payoff))
  BorneInf<-Callvalue-1.96*sd(payoff)/sqrt(repetitions)
  Bornesup<- Callvalue+1.96*sd(payoff)/sqrt(repetitions)
  print(Callvalue)
  paste("l'intervalle de confiance a 95% est", BorneInf, Bornesup)
    }
  }
}

```

IV-1-3 Comparaison des résultats

Nous comparons ici la performance des programmes précédents, en particulier on regarde la convergence de la méthode de Monte-Carlo lorsque le nombre de trajectoires augmente. Les valeurs des paramètres de la fonction R sont : $(u,d,n,St,K,r,t)=(1.05,-1.05,50,60.85,60,0.003,12)$ et le nombre de trajectoires(*repetitions*) varie dans l'ensemble $\{100,1000,10000,1000000\}$. On obtient alors le tableau suivant :

Nombre de trajectoires	valeur exacte	valeur estimée	Intervalle de confiance à 95%
100	172,3303	172,9921	[141,16 204,82]
1000	172,3303	171,5261	[161,4872 181,565]
10000	172,3303	173,9304	[170,7628 177,094]
1000000	172,3303	172,2342	[172,2042 172,868]

IV- 2 Le modèle de Black-Scholes-Merton

IV-1-1 Calcul explicite par la formule analytique

On utilise la formule (I.23) obtenue dans le chapitre I pour calculer directement la valeur d'un Call européen à l'instant t dans le modèle de Black-Scholes-Merton. La procédure est implémentée sur R en définissant une fonction qui prend comme arguments :

St : la valeur du sous-jacent qui est connue (nous travaillons conditionnellement à \mathcal{F}_t^-) ;

K : le prix d'exercice ou strike de l'option ;

$vola$ désigne la volatilité du sous-jacent supposée constant et connue dans le modèle ;

TTM représente la différence $(T - t)$ appelée temps à la maturité ;

r : rendement de l'actif sans risque.

En remarquant que :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right]$$

On peut écrire sous R:

Programme de Calcul d'un Call européen dans un modèle de Black-Scholes-Merton

```
BSexact<-function(St, K, TTM, vola, r) {
```

```
#Implémentation directe de la formule de Black-Scholes
```

```
if(TTM>0){ #On calcule d'abord d1 et d2
```

```
    d1<-((log(St/K)+(r+vola*vola/2)*TTM)/(vola*sqrt(TTM))
```

```
    d2<-d1-vola*sqrt(TTM)
```

```
    BSValue<-St*pnorm(d1)-K*exp(-r*TTM)*pnorm(d2)
```

```
    }
```

```
else{ BSValue<-max(St-K,0)
```

```
}
```

```
return(BSValue)
```

```
}
```

IV-1-2 Simulation Monte-Carlo du modèle de Black-Scholes-Merton

Il s'agit de reprendre dans le cadre du modèle de Black-Scholes-Merton ce que nous avons fait pour le modèle binomial. L'algorithme est le suivant :

- on simule un nombre M de trajectoires de brownien géométrique suivies par le sous-jacent ;
- on calcule sur chacune de ces trajectoires le pay-off actualisé de l'option ;
- on prend la moyenne arithmétique sur les M pay-off actualisés calculés précédemment.

Programme de Calcul par Simulation Monte-Carlo d'un Call européen dans un modèle de Black-Scholes-Merton

```

BSmontcarlo<-function(St, K, TTM, r, vola, steps, numofpaths) {

  dn<-TTM/steps
  paths<-matrix(0,numofpaths, steps+1)
  payoff<-rep(0,numofpaths) # on initialise le vecteur des pay-off du Call européen
  for (j in 1:numofpaths) {
    S<-rep(0,steps+1)
    S[1]<-St
    Z<-rnorm(steps,0,1)
    for (i in 1:steps) {

      S[i+1]<-S[i]*exp((r-.5*vola^2)*dn+vola*sqrt(dn)*Z[i])
    }
    paths[j,]<-S
    payoff[j]<-max(paths[j,steps+1]-K,0)*exp(-r*TTM)
  }

  # valeur du Call estimée et variance estimée de l'estimateur
  Callvalue<-mean(payoff) ;vCallvalue<-var(payoff)
  BorneInf<-Callvalue-1.96*sd(payoff)/sqrt(numofpaths)
  Bornesup<- Callvalue+1.96*sd(payoff)/sqrt(numofpaths)
  print(Callvalue)
  paste("l'intervalle de confiance a 95% est", BorneInf, Bornesup)
}

```

IV-2-3 Comparaison des résultats

Nous étudions la convergence de la méthode de Monte-Carlo dans le cadre du modèle de Black et Scholes/Merton lorsque le nombre de trajectoires augmente. Les valeurs des paramètres de la fonction R sont : $(St, K, TTM, r, vola, steps) = (60.85, 60, 8, 0.15, 0.003, 100)$ et le nombre de trajectoires ($numofpaths$) varie dans l'ensemble $\{100, 1000, 10000\}$. On obtient alors le tableau suivant :

Nombre de trajectoires	valeur exacte	valeur estimée	Intervalle de confiance à 95%
100	17.44843	17.18471	[11.809 22.56]
1000	17.44843	17.86348	[16.352 19.374]
10000	17.44843	17.21881	[16.7643 17.673]

Pour observer l'effet du nombre de divisions (steps) de l'intervalle $[t, T]$. On fixe le nombre de trajectoires à 500 et on fait varier *steps* dans $\{50, 100, 500, 1000\}$. Le tableau suivant nous présente les résultats.

Nombre de subdivisions	valeur exacte	valeur estimée	Intervalle de confiance à 95%
50	17.44843	18.35621	[16.111 20.60]
100	17.44843	17.53611	[15.473 19.60]
500	17.44843	17.19419	[15.072 19.315]
1000	17.44843	17.43279	[15.521 19.344]

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La connaissance de la loi des marchés financiers à partir de l'information révélée par les prix : tel est le challenge auquel essaie de répondre l'article que nous avons à analyser. Il s'agit d'un problème inverse (détermination d'une densité de probabilité à partir de ses moments) pour lequel la théorie des problèmes mal posés développée par Tikhonov donne des solutions dans les cas linéaire et finidimensionnel. Le problème de calibration dans les modèles exponentielle-Lévy est du type non linéaire et de dimension infini. Pour y faire face, les auteurs mettent à profit la notion d'entropie relative qu'ils utilisent comme critère de régularisation. Ce faisant, ils parviennent à spécifier une unique mesure-martingale parmi la multitude due à l'incomplétude du marché.

Pour faire l'économie de leur travail nous avons jugé bon, au préalable de préciser le cadre général et classique dans lequel s'insère naturellement le problème de calibration. Ainsi, nous avons tour à tour rappelé les modèles classiques d'évaluation des options qui existent dans la littérature, en particulier le modèle Binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein dans le cadre discret et le modèle de Black-Scholes-Merton dans le cadre continu. Par ailleurs nous avons introduit une des principales extensions du modèle de Black et Scholes, à savoir les modèles Exponentielle-Lévy qui sont le cadre mathématique dans lequel est développé l'article.

Notre travail a aussi consisté à présenter, à travers un large recours à la littérature spécialisée, l'incidence et surtout les contributions majeures apportées par l'article. Ce faisant, nous avons essayé d'éclairer notre compréhension²⁵ du sujet par une approche volontairement didactique. Conscient de la portée restrictive d'une telle démarche, nous entrevoyons comme voie de recherche future de regarder plus en profondeur l'aspect concernant l'implémentation numérique développée par les auteurs.

²⁵ et espérons-nous celui de notre lecteur !

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Black F. and Scholes M.: (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, **81**, pp 637-659.
- [2] Cont R. and Tankov P.:(2004), "Non parametric Calibration of Jump-diffusion option pricing models", *The journal of Computational finance*, **7**, 49 pages.
- [3] Dana R-A et Jeanblanc-Picque M. : (1994), " Marchés financiers en temps continu : Valorisation et Equilibre" Economica, Paris, 291 pages.
- [4] Frachot A.: (2001), "Théorie et Pratique des instruments financiers", *Cours de l'Ecole Polytechnique de Paris –France*, janvier 2001, 139 pages.
- [5] El Karoui N. : (2003),"Couverture des risques financiers", *Cours du DEA de probabilités, option finance de l'Université Paris VI*, 2003/2004, 267 pages.
- [6] Marceau E. : (2000) " Le modèle binomial (ou discret)" *Notes de cours de l'Ecole d'actuariat de l'Université Laval au Québec*, 24 pages.
- [7] Millet A. : (2004)," Méthode de Monte-Carlo", *Cours du DEA de Statistiques et Modèles aléatoires en Economie et en Finance des Universités Paris VII et I*, 125 pages.
- [8] Tankov P. : (2004) , "Processus de Lévy en Finance : Problèmes Inverses et Modèles de dépendance", *PhD Thesis, Ecole Polytechnique* ,200 pages.